ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
82

For Senior & Graduate Courses

超重力理論

超弦理論における役割

◆

谷井 義彰　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-82

超重力理論

超弦理論における役割

谷井　義彰　著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～28 省略（品切含）

29 伝えるための理工系英語
宮野健次郎著　本体 1429 円

31 分子コンピュータの現状と展望
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 量子情報理論入門
林正人著　本体 1886 円

33 工学のための非線形解析入門
藪野浩司著　本体 1857 円

34 経済における確率的モデルへの招待
青木正直著／青山・藤原 監訳　本体 1886 円

35 賭けの数理と金融工学
竹内啓著　本体 1429 円

36 応用のための確率論・確率過程
松本裕行著　本体 1876 円

38 複素ニューラルネットワーク
廣瀬明著　本体 1695 円

40 制御理論講義
木村英紀著　本体 1886 円

41 バイオインフォマティクスの基礎
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 トポロジー入門
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 アルゴリズムと計算量
谷聖一著　本体 1857 円

44 ゲーム理論のフロンティア
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

45 ゲージ場の量子論入門
近藤慶一著　本体 1886 円

46 現代物理のための解析力学
早田次郎著　本体 1857 円

47 現代物理数学への招待
鈴木淳史著　本体 1876 円

48 例題形式で学ぶ現代素粒子物理学
川村嘉春著　本体 1886 円

49 ソリトンと物理学
戸田盛和著　本体 1876 円

50 確率的情報処理と統計力学
田中和之編著　本体 1857 円

51 超対称性理論
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

52 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何
谷村省吾著　本体 1886 円

53 ゲノム進化を考える
斎藤成也著　本体 1429 円

54 非平衡統計力学
早川尚男著　本体 1790 円

55 超幾何関数入門
木村弘信著　本体 1857 円

56 相対性理論
三尾典克著　本体 1838 円

57 3 次元トポロジーの新展開
戸田正人著　本体 1867 円

58 数理・情報系のための整数論講義
木田雅成著　本体 1876 円

59 コンピュータ将棋の頭脳
小谷善行著　本体 1429 円

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 演習くり込み群
柏太郎著　本体 1886 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著　本体 1886 円

64 代数幾何入門講義
小林正典著　本体 1876 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 物理のためのリー群とリー代数
窪田高弘著　本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著　本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 重点解説 基礎微分幾何
塩谷隆著　本体 1886 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著　本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著　本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著　本体 1781 円

75 数物系のための圏論
梶浦宏成著　本体 2143 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著　本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著　本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著　本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著　本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著　本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著　本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著　本体 2381 円

まえがき

本書は，超重力理論の入門的な解説書である．超重力理論は，ボソンとフェルミオンの間の対称性である超対称性をもつ重力理論であり，一般相対性理論を拡張した理論の一つと見ることができる．この理論は，超弦理論の低エネルギーにおける有効理論であり，超弦理論の非摂動論的性質を議論する際に欠かせないものとなっている．本書では，主に超弦理論への応用を念頭に置き，超重力理論の基礎的な内容について解説した．具体的には，ラグランジアンや場の方程式の構造と，それらのもつ局所的および大局的対称性について説明した．超重力理論の物理的な応用についてはほとんど触れていない．内容はかなり技術的なものが多いが，超弦理論を勉強する際の参考書として役立ててもらえれば幸いである．

本書の内容を理解するための予備知識としては，一般相対性理論の基礎（Riemann 幾何学や Einstein 方程式など）と相対論的な場の理論の基礎（Dirac 方程式，Yang–Mills 場，自発的対称性の破れなど）を知っていることが望ましい．ほとんどの議論は古典論の範囲なので，場の量子論のくわしい知識は必要としない．

紙数と時間的な制約のため，次の点については取り上げられなかった．まず，本書では主に超重力多重項だけからなる理論を扱い，物質超多重項との結合についてはあまり触れなかった．物質超多重項を含んだ理論は，小さな超対称性の場合に可能であり，より多様な構造をしている．応用としては，素粒子物理学の模型を構築する際などに必要である．また，時空の次元が 4 次元以上の理論だけに限った．超重力理論は 2 次元や 3 次元でも構成されており，特に 2 次元の理論は超弦理論の NSR 形式の定式化で，世界面上の変数として現れる．さらに，第 8 章のアノマリーの議論以外は古典論の範囲の議論だけで，量子化の方法や紫外発散などの量子論的性質については触れなかった．

本書の構成は次のようになっている．第 1 章では，超弦理論における超重力理論の役割について簡単に述べた後，超重力理論を議論するための予備知識として，重力場とそれに結合したいろいろな種類の場の理論の定式化について説明する．第 2 章では，4 次元時空の超重力理論について述べる．この章を読めば，超重力理論の概要がつかめるものと思う．後の章で議論する高次元の理論の特徴の多くは 4 次元の理論でも現れているので，高次元の理論への序論にもなっている．第 3 章と第 4 章は，高次元の超重力理論を議論するための準備である．第 3 章では，超対称性をもつ理論の基礎になっている超代数とその表現について述べる．これによって，各次元で可能な超重力理論の種類と，それに含まれる場の種類がわかる．第 4 章では，超重力理論のもつ非コンパクト対称性について述べる．スカラー場を含む理論は非コンパクトな内部対称性をもち，それは超弦理論の双対性の議論で重要な役割を果たす．第 5 章では，これらの結果を使って，高次元の超重力理論について述べる．特に，M 理論や超弦理論に密接に関係した 11 次元と 10 次元の超重力理論についてくわしく説明する．第 6 章と第 7 章では，11 次元や 10 次元の超重力理論から低次元の理論を導く次

元還元の方法について述べる．第6章では，次元還元によって重力場とその他の種類の場がどのような低次元の理論を導くかを見る．第7章では，その結果を超重力理論に応用する．特に，低次元の理論の非コンパクト対称性が高次元の理論からどのように現れるかについて議論する．第8章では，理論を量子化した際に現れる局所対称性のアノマリーの相殺について述べる．これは，矛盾のない超重力理論や超弦理論に対する制限を与える．最後に，第9章では，ゲージ化された超重力理論とそれに似た有質量超重力理論について述べる．これらはパラメータを含んだ理論で，第2章や第5章で述べる理論を変形したものと見ることができる．付録では，本書で使う表記法，超重力理論の計算でよく使われるガンマ行列の公式，4次元の理論の計算の詳細，および，反 de Sitter 時空についてまとめてある．

サイエンス社「数理科学」編集部の平勢耕介氏には，本書の執筆を勧めていただき，また，執筆に際してはたいへんお世話になりました．感謝いたします．

2011年2月

谷井　義彰

目　次

第 1 章
序論

この章では，まず，超弦理論や M 理論における超重力理論の役割について述べる．超重力理論は，これらの理論の低エネルギー有効理論になっている．また，超重力理論を議論するための準備として，重力場とそれに結合したいろいろな種類の物質場の理論の定式化について述べる．

1.1　超重力理論と超弦理論

超重力理論（supergravity）は超対称性をもつ重力理論であり，一般相対性理論の一つの拡張と見ることができる．**超対称性**（supersymmetry）は，ボソンとフェルミオンの間の対称性である．超重力理論は，素粒子の標準理論がもつゲージ対称性のような，局所的な超対称性をもっている．超対称性のゲージ場は，スピン $\frac{3}{2}$ をもつ Rarita–Schwinger 場である．超重力理論の重要な役割の一つは，超対称性をもつ弦理論である**超弦理論**（superstring）の低エネルギー有効理論としてである．

超弦理論とは

弦理論（string theory）は，1 次元的広がりをもった弦（string）に基づいた理論である．弦は，図 1.1 のようなトポロジーの違いによって，開弦と閉弦の 2 種類に分けられる．点粒子の場合と違い，弦は並進の他に振動や回転のような内部運動の自由度をもち，それが，異なる質量やスピンをもったいろいろな状態を表す．閉弦にはゼロ質量のスピン 2 をもつ粒子が含まれ，グラビトン



図 1.1　開弦と閉弦．

(graviton, 重力子) を表す．通常の場の理論に基づいた重力の量子論は，繰り込み不可能な理論であり，紫外発散の取り扱いに問題がある．しかし，弦理論は紫外発散を含まない理論であると考えられているので，弦理論を使って矛盾のない重力の量子論を構成できる可能性がある．また，開弦や閉弦によってゼロ質量のスピン 1 の粒子を表すことができる．これは，素粒子の標準理論に含まれているようなゲージ粒子である．弦理論は自由パラメータを含まない理論であるので，弦理論を使って任意性の少ない素粒子の統一理論を構成できる可能性がある．これらのことから，弦理論は重力を含めた素粒子の統一理論の有力な候補と考えられ，さかんに研究されてきた．

弦理論には，グラビトンやゲージ粒子を含む有限個のゼロ質量粒子の他に，弦の励起状態に対応する無限個の有質量粒子が存在する．励起状態の質量は，**Regge スロープパラメータ**とよばれる長さの 2 乗の次元をもった定数 α' を使うと，$(\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ のオーダーである．弦理論を素粒子の統一理論へ応用する場合は，$(\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ は現在の加速器で到達できているエネルギーに比べて非常に大きい（たとえば Planck エネルギー 10^{19}GeV 程度）と考える．したがって，低エネルギーの現象を考える場合は，ゼロ質量粒子だけを使った有効理論を考えればよい．このような低エネルギー有効理論は，通常の場の理論の言葉を使って記述することができる．特に，超対称性をもつ超弦理論では，ゼロ質量粒子の低エネルギー有効理論は，超重力理論によって記述される．

超弦理論の非摂動論的方法

弦理論は未完成な理論で，その基本的な定式化がどのようなものであるべきかがわかっていない．そのため，摂動論的な性質は比較的よく理解されているものの，非摂動論的な性質の理解が不十分である．これを補う手段として，超弦理論の低エネルギー有効理論である超重力理論を使うことができる．超重力理論は，紫外発散の問題のため量子論的な性質を議論する際には使うことができないが，古典論的な近似がよい場合には大変役に立つ理論である．基本的な定式化の知られていない超弦理論とちがい，超重力理論は一般相対性理論を拡張した通常の場の理論として定式化されている．場の方程式の解を調べることにより，摂動論的な弦理論では得ることのむずかしい情報を得ることができる．

現在では，弦理論そのものを使った非摂動論的方法も知られるようになってきた．これは，弦理論における 2 つの発見によって可能になった．一つは **D ブレイン**[*1)]（D-brane）であり，もう一つは**弦の双対性**[*2)]（string duality）である．D ブレインは，弦理論に含まれる広がりをもった物体である．開弦の両端は D ブレイン上に束縛され，その上を動く．D ブレインは，場の理論のソリト

*1) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724.
*2) C.M. Hull and P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109; E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85.

ン解に対応するものである．ソリトン解は場の理論の非摂動論的性質を調べるのに有効な手段であったが，弦理論でもDブレインを非摂動論的性質の解析に使うことができる．

弦の双対性は，異なる理論と考えられていた超弦理論の間に見つかった関係である．超対称性をもつ弦理論として，5種類の理論

- IIA 型超弦理論
- IIB 型超弦理論
- $E_8 \times E_8$ ヘテロ型弦理論
- $SO(32)$ ヘテロ型弦理論
- I 型超弦理論

が知られている．これらの弦理論は，10次元時空の理論である．弦理論そのものではないが，弦理論に関連した11次元の理論として，6つ目の理論

- M 理論

も提案された．（これらの理論については，3.4節で簡単に紹介する．）これら6種類の理論は密接に関連しており，1つの基本的な理論の6種類の極限を表していると考えられている．これを弦の双対性という．重要な点は，双対性によって強結合の理論と弱結合の理論が結びついている場合があることである．強結合理論は，結合定数についての展開である摂動論が使えないため，解析がむずかしい．それを双対性によって弱結合理論に関連づけられれば，弱結合理論を摂動論的に解析することにより，強結合理論の性質を知ることができる．

このような弦の双対性は，現在のところ仮説である．これを厳密に証明するには，超弦理論の非摂動論的な定式化が必要であり，それは現在知られていない．しかし，この仮説が正しいことについては，いろいろな状況証拠がある．その一部は超重力理論を使ったものであり，ここでも超重力理論が重要な役割を果たしている．スカラー場を含む超重力理論は，非コンパクト群の変換に対する大局的対称性をもつ．このような超重力理論を有効理論として含む超弦理論は，この非コンパクト群の離散部分群の変換に対して不変であると考えられる．この離散群の対称性は，弦の双対性を理解するのに役立つ．

本書では，このように弦理論の双対性の議論で重要な役割を果たす非コンパクト対称性を中心にして，4次元以上の時空における超重力理論について解説する．

1.2 重力場

超重力理論には，重力場を初めとするいろいろな種類の場が含まれている．この章の以下では，重力場とそれに結合したいろいろな物質場の定式化についてまとめておく．本書では4次元よりも高い次元の時空の理論も考えるので，

時空は時間 1 次元，空間 $D-1$ 次元，合わせて D 次元をもつとする．時空の座標を x^μ $(\mu = 0, 1, \cdots, D-1)$ とする．x^0 が時間を表す．本書で使うその他の表記法は付録 A にまとめた．場の理論を定式化するには，作用に対する変分原理を使うと便利である．**作用** S は，**ラグランジアン**[*3] $\mathcal{L}$ の D 次元時空についての積分の形

$$S = \int d^D x \, \mathcal{L}, \qquad d^D x = dx^0 \, dx^1 \, \cdots \, dx^{D-1} \tag{1.1}$$

で与えられる．$\mathcal{L}$ は場とその微分の関数であり，S は場の汎関数である．

重力場の定式化には，重力を表す力学変数として計量を使う計量形式と，多脚場を使う多脚場形式の 2 種類がある．スカラー場やベクトル場，反対称テンソル場などのボソン場との結合を考える場合は，どちらの形式も使うことができる．スピノール場のようなフェルミオン場との結合を考える場合は，多脚場形式を使う必要がある．

1.2.1 計量形式

重力理論の通常の定式化では，重力を表す力学変数として**計量** $g_{\mu\nu}(x)$ を使う．このような定式化を**計量形式**とよぶ．この定式化では，重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ に対するラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \, (R - 2\Lambda) \tag{1.2}$$

である．第 1 項を Einstein 項，第 2 項を宇宙項とよぶ．G は **Newton 定数（万有引力定数）**，Λ は**宇宙定数**である．以下では，簡単のため，$16\pi G = 1$ となる単位系を使う．$g = \det g_{\mu\nu}$ であり，$\sqrt{-g}$ は一般座標変換に対してスカラー密度として変換する．**スカラー曲率** R は，**Ricci テンソル** $R_{\mu\nu}$ と **Riemann テンソル** ${R_{\mu\nu}}^\rho{}_\sigma$ から

$$\begin{aligned} &R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad R_{\mu\nu} = {R_{\rho\mu}}^\rho{}_\nu, \\ &{R_{\mu\nu}}^\rho{}_\sigma = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{1.3}$$

のように定義される．$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である．**Christoffel 記号** $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は，計量を使って

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.4}$$

と表される．Christoffel 記号のこの形は，

$$\begin{aligned} &\text{計量条件}: \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0, \\ &\text{捩率条件}: \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{1.5}$$

によって一意的に決まる．Christoffel 記号を使うと，ベクトルやテンソルに対

*3) 正確にはラグランジアン密度だが，簡単のためラグランジアンとよぶことにする．

する**共変微分**を定義することができる．たとえば，反変ベクトル V^μ と共変ベクトル V_μ に対する共変微分は，

$$
\begin{aligned}
D_\mu V^\nu &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^{\ \nu} V^\rho, \\
D_\mu V_\nu &= \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^{\ \rho} V_\rho
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

と定義される．これらの共変微分は，一般座標変換に対して共変的に（テンソルとして）変換する．

ラグランジアン (1.2) から変分原理によって $g_{\mu\nu}$ に対する場の方程式を求めると，宇宙項のある Einstein 方程式

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.7}
$$

が得られる．$T_{\mu\nu}$ は，重力場以外の場のエネルギー・運動量テンソルである．（今は重力場しか考えていないので $T_{\mu\nu}=0$ である．）Einstein 項の変分を行う際には，ラグランジアンの $g_{\mu\nu}$ 依存性を，Christoffel 記号を通して依存している部分と，$g_{\mu\nu}$ の形であらわに依存している部分の 2 つに分けて考えるとよい．まず，Christoffel 記号を通した依存性を変分すると，

$$
\delta\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(D_\rho\, \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\ \rho} - D_\mu\, \delta\Gamma_{\rho\nu}^{\ \rho} \right) \tag{1.8}
$$

となる．部分積分をして，(1.5) の計量条件を使うと，この変分は全微分項だけになり，場の方程式には寄与しない．したがって，$\mathcal{L}$ の中のあらわな計量依存性についてだけ変分をとればよく，その結果 Einstein 方程式 (1.7) が得られる．

ラグランジアン (1.2) は，任意のベクトル関数 $\xi^\mu(x)$ を変換パラメータとする無限小**一般座標変換** (general coordinate transformation)

$$
\begin{aligned}
\delta_G\, g_{\mu\nu} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu \xi^\rho g_{\mu\rho} \\
&= D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

に対して，

$$
\delta_G\, \mathcal{L} = \partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) \tag{1.10}
$$

のように全微分の形の項だけ変化する．したがって，ラグランジアン (1.2) を D 次元時空について積分した作用 (1.1) は，一般座標変換に対して不変である．

1.2.2　多脚場形式

重力場をスピノール場に結合させるには，**多脚場形式**による定式化を使う必要がある．この定式化では，時空の各点 x^μ に D 個の独立なベクトル $e_a{}^\mu(x)$ $(a=0,1,\cdots,D-1)$ を，

$$
e_a{}^\mu(x)\, e_b{}^\nu(x)\, g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}, \qquad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,\cdots,+1) \tag{1.11}
$$

のように，互いに直交し，単位長さをもつように選ぶ．$e_0{}^\mu$ は時間方向のベクトルである．また，$e_a{}^\mu(x)$ の逆行列を $e_\mu{}^a(x)$ とすると，

$$e_\mu{}^a(x)\,e_a{}^\nu(x) = \delta_\mu^\nu, \qquad e_a{}^\mu(x)\,e_\mu{}^b(x) = \delta_a^b \tag{1.12}$$

が成り立つ．場 $e_\mu{}^a(x)$ は，**多脚場**（vielbein）（4 次元では**四脚場**（vierbein），5 次元では五脚場（fünfbein）など）と呼ばれる．(1.11), (1.12) から，多脚場を使って，計量を

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^a(x)\,e_\nu{}^b(x)\,\eta_{ab} \tag{1.13}$$

と表せることがわかる．したがって，多脚場 $e_\mu{}^a(x)$ を重力の自由度を表す力学変数として使うことができる．行列式 $e = \det e_\mu{}^a$ が正になるように多脚場を選ぶと，$\sqrt{-g} = e$ が成り立つ．

与えられた計量 $g_{\mu\nu}$ に対して，(1.13) を満たす多脚場 $e_\mu{}^a$ は一意的には決まらない．ある $e_\mu{}^a$ が (1.13) を満たすとき，

$$e'_\mu{}^a(x) = e_\mu{}^b(x)\,\Lambda_b{}^a(x), \qquad \Lambda_a{}^c(x)\,\Lambda_b{}^d(x)\,\eta_{cd} = \eta_{ab} \tag{1.14}$$

も同じ $g_{\mu\nu}$ に対して (1.13) を満たす．計量は $\frac{1}{2}D(D+1)$ 個の独立な成分をもっているが，多脚場は D^2 個の成分をもっている．その差 $\frac{1}{2}D(D-1)$ は，(1.14) の $\Lambda_a{}^b$ の独立な成分の個数である．変換 (1.14) は，**局所 Lorentz 変換**（local Lorentz transformation）とよばれる．計量形式で記述されていた理論を多脚場形式で表した場合には，局所 Lorentz 変換に対して不変になっているはずである．このように，多脚場で記述された重力理論は，2 種類の局所変換，一般座標変換と局所 Lorentz 変換，に対する対称性をもっている．

2 種類のベクトル添字のうち $\mu, \nu, \cdots$ を**世界添字**（world index），$a, b, \cdots$ を**局所 Lorentz 添字**（local Lorentz index）とよぶ．これらの 2 種類の添字は，多脚場を使って

$$A_a(x) = e_a{}^\mu(x)\,A_\mu(x), \qquad A_\mu(x) = e_\mu{}^a(x)\,A_a(x) \tag{1.15}$$

のように，お互いに取り替えることができる．添字の上げ下げ（共変添字と反変添字の入れ換え）は，世界添字については計量 $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ を使い，局所 Lorentz 添字については Minkowski 計量 η^{ab}, η_{ab} を使う．たとえば，

$$A^\mu = g^{\mu\nu}\,A_\nu, \qquad A^a = \eta^{ab}\,A_b \tag{1.16}$$

である．局所 Lorentz 添字をもつテンソル場は，局所 Lorentz 変換に対して (1.14) のように変換する．一般座標変換に対しては，世界添字によって表されるテンソル場として変換する．例えば，多脚場 $e_\mu{}^a(x)$ は，無限小の一般座標変換 δ_G と局所 Lorentz 変換 δ_L に対して

$$
\begin{aligned}
&\delta_G\, e_\mu{}^a = \xi^\nu\, \partial_\nu\, e_\mu{}^a + \partial_\mu\, \xi^\nu\, e_\nu{}^a, \\
&\delta_L\, e_\mu{}^a = -\lambda^a{}_b\, e_\mu{}^b
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

と変換する．ここで，$\xi^\mu(x)$ と $\lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ba}(x)$ は，無限小の変換パラメータである．

局所 Lorentz 変換に対する共変微分をつくるには，ゲージ場が必要である．局所 Lorentz 変換に対するゲージ場を，**スピン接続**（spin connection）とよび，$\omega_\mu{}^a{}_b(x)$ ($\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$) と書く．スピン接続は，局所 Lorentz 変換に対して，

$$
\delta_L\, \omega_\mu{}^{ab} = D_\mu\, \lambda^{ab} \equiv \partial_\mu\, \lambda^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c\, \lambda^{cb} + \omega_\mu{}^b{}_c\, \lambda^{ac} \tag{1.18}
$$

と変換する．このスピン接続を使い，局所 Lorentz 変換に対して共変的に変換する微分を定義することができる．たとえば，ベクトル V^a に対する**共変微分**は，

$$
D_\mu\, V^a = \partial_\mu\, V^a + \omega_\mu{}^a{}_b\, V^b \tag{1.19}
$$

である．局所 Lorentz 変換に対する V^a と $\omega_{\mu ab}$ の変換性を使うと，$D_\mu V^a$ が V^a と同じ形の共変的な変換をすることがわかる．

一般座標変換に対する共変微分を定義するときに使った Christoffel 記号は，独立な場ではなく，計量条件と捩率条件を要請することにより計量を使って表すことができた．それと同様に，スピン接続も多脚場を使って表すことができる．そのためには，スピン接続に対して**捩率条件**

$$
D_\mu\, e_\nu{}^a - D_\nu\, e_\mu{}^a = \partial_\mu\, e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b\, e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \tag{1.20}
$$

を要請する．添字 μ, ν について反対称化されているので，共変微分の中の Christoffel 記号の項は相殺している．計量条件は，スピン接続の反対称性 $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$ に対応するので，自動的に満たされている．(1.20) を満たす $\omega_{\mu ab}$ は一意的に決まり，

$$
\begin{aligned}
&\omega_{\mu ab}(e) = \frac{1}{2}\left(e_a{}^\nu\, \Omega_{\mu\nu b} - e_b{}^\nu\, \Omega_{\mu\nu a} - e_a{}^\rho\, e_b{}^\sigma\, e_\mu{}^c\, \Omega_{\rho\sigma c}\right), \\
&\Omega_{\mu\nu a} = \partial_\mu\, e_{\nu a} - \partial_\nu\, e_{\mu a}
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

となる．これは，スピン接続を多脚場を使って表した式である．多脚場を (1.17) のように局所 Lorentz 変換すると，この $\omega_{\mu ab}$ が (1.18) の形の変換をすることが確かめられる．

スピン接続 (1.21) と Christoffel 記号 (1.4) の間には関係があり，

$$
D_\mu\, e_\nu{}^a = \partial_\mu\, e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b\, e_\nu{}^b - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, e_\lambda{}^a = 0 \tag{1.22}
$$

が成り立つ．これを使うと，スピン接続からつくった場の強さ

$$
R_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu\, \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu\, \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c\, \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c\, \omega_\mu{}^c{}_b \tag{1.23}
$$

が Riemann テンソル (1.3) と

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = R_{\mu\nu}{}^{a}{}_{b}\, e_a{}^{\rho}\, e_\sigma{}^{b} \tag{1.24}$$

のように関係していることがわかる．

時空の対称性

重力場の形 $e_\mu{}^a(x)$ が与えられたとき，それのもつ対称性を考えよう．このような時空の対称性を，**アイソメトリ**（isometry）とよぶ．これは，一般座標変換と局所 Lorentz 変換のうち，その重力場の形を保つような変換によって与えられる．$e_\mu{}^a$ に対する一般座標変換と局所 Lorentz 変換は，

$$\begin{aligned}(\delta_G + \delta_L)\, e_\mu{}^a &= \xi^\nu\, \partial_\nu\, e_\mu{}^a + \partial_\mu\, \xi^\nu\, e_\nu{}^a - \lambda^a{}_b\, e_\mu{}^b \\ &= \frac{1}{2}\,(D_\mu\, \xi_\nu + D_\nu\, \xi_\mu)\, e^{a\nu} \\ &\quad - \left[\lambda^a{}_b + \frac{1}{2}\,(D^a\, \xi_b - D_b\, \xi^a) + \xi^\nu\, \omega_\nu{}^a{}_b\right] e_\mu{}^b \end{aligned} \tag{1.25}$$

のように書くことができる．したがって，$e_\mu{}^a$ が不変であるためには，

$$D_\mu\, \xi_\nu + D_\nu\, \xi_\mu = 0, \qquad \lambda_{ab} = -D_{[a}\, \xi_{b]} - \xi^\nu\, \omega_{\nu ab} \tag{1.26}$$

が成り立たなければならない．(角括弧 [ ] は添字の反対称化を表す．付録 A.2 参照.) 初めの式は，一般座標変換のパラメータ ξ^μ が満たすべき方程式で，**Killing 方程式**とよばれる．また，それを満たすベクトル ξ^μ を **Killing ベクトル**という．Killing ベクトル ξ^μ が得られると，2 番目の式から，局所 Lorentz 変換のパラメータ λ_{ab} が決まる．

例として，平坦な Minkowski 時空の場合を考えてみよう．この場合，$e_\mu{}^a = \delta_\mu^a$，$\omega_{\mu ab} = 0$ であり，Killing ベクトルとそれから決まる局所 Lorentz 変換は，

$$\xi^\mu = a^\mu{}_\nu\, x^\nu + b^\mu, \quad \lambda_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \qquad (a^\mu{}_\nu,\ b^\mu \text{ は定数}) \tag{1.27}$$

となる．この ξ^μ は，大局的 Lorentz 変換 $a^\mu{}_\nu$ と並進 b^μ からなる座標変換を表している．それとともに，定数 $a^\mu{}_\nu$ をパラメータとする局所 Lorentz 変換もいっしょに行う必要がある．この特別な一般座標変換と局所 Lorentz 変換を合わせたものが，Minkowski 時空上の場の理論の Poincaré 対称性の変換である．

便利な公式

重力場を含む計算で便利な公式を上げておく．まず，ラグランジアンの Einstein 項は，スピン接続を使って，

$$e\, R = e\left(\omega_a{}^{ac}\, \omega_b{}^b{}_c + \omega_a{}^{bc}\, \omega_{bc}{}^a\right) + \partial_\mu\,(2e\, \omega_a{}^{\mu a}) \tag{1.28}$$

のように表すことができる．これを **Palatini 恒等式**という．任意の関数 $\sigma(x)$ を使った重力場の変換

$$e_\mu{}^a(x) \ \to \ e'_\mu{}^a(x) = e^{\sigma(x)}\, e_\mu{}^a(x) \tag{1.29}$$

を **Weyl 変換**という．この Weyl 変換に対して，スピン接続とスカラー曲率は，

$$\begin{aligned} &\omega'_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + 2\, e_{\mu[a}\, \partial_{b]}\, \sigma, \\ &R' = e^{-2\sigma}\, [R - 2(D-1) D^\mu\, \partial_\mu \sigma - (D-1)\,(D-2)\, \partial_\mu \sigma\, \partial^\mu \sigma] \end{aligned} \tag{1.30}$$

のように変換する．

1.3 スカラー場

重力場に結合した物質場として，まず実スカラー場 $\phi(x)$ を考えよう．量子論では，スカラー場はスピンがゼロのスカラー粒子を表す．質量 m のスカラー場のラグランジアンは，重力場以外との相互作用がない場合，

$$\mathcal{L} = e \left[-\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \tag{1.31}$$

で与えられる．このラグランジアンからつくった作用を ϕ について変分すると，重力場中の Klein–Gordon 方程式

$$D^\mu\, \partial_\mu \phi - m^2 \phi = 0 \tag{1.32}$$

が得られる．また，(1.31) と重力場のラグランジアン (1.2) の和からつくった作用を重力場について変分すると，Einstein 方程式 (1.7) が得られ，スカラー場のエネルギー・運度量テンソル $T_{\mu\nu}$ は，

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, \left(\partial^\rho \phi\, \partial_\rho \phi + m^2 \phi^2 \right) \tag{1.33}$$

となる．スカラー場の場の方程式 (1.32) を使うと，このエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が連続の方程式 $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を満たすことを示せる．

より一般的には，複数の実スカラー場 $\phi^i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が自己相互作用している理論を考えることができる．その場合のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = e \left[-\frac{1}{2}\, G_{ij}(\phi)\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi^i\, \partial_\nu \phi^j - V(\phi) \right] \tag{1.34}$$

という形をしている*4)．ここで，$G_{ij}(\phi)$, $V(\phi)$ は，スカラー場の与えられた関数である．$G_{ij}(\phi)$ はスカラー場が値をとる空間の計量を表し，$V(\phi)$ はスカラー場のポテンシャルである．このようなラグランジアンをもつスカラー場の理論は，**非線形シグマ模型**とよばれる．超重力理論に現れる非線形シグマ模型については，4.1 節で述べる．

ラグランジアン (1.31) や (1.34) からつくった作用は，一般座標変換に対す

*4)　添字 i, j については，1 から n までの和をとっているが，和の記号を省略した．以下の式でも同様である．

る不変性をもっている．スカラー場の一般座標変換は，

$$\delta_G\,\phi^i = \xi^\mu\,\partial_\mu\phi^i \tag{1.35}$$

である．変換 (1.9), (1.35) に対して，ラグランジアンは (1.10) のように全微分だけ変化し，したがって作用は不変である．

1.4 スピノール場

スピノール場 $\psi(x)$ は，一般座標変換に対してはスカラー場として変換し，局所 Lorentz 変換に対しては

$$\delta_L\,\psi = -\frac{1}{4}\,\lambda_{ab}\,\gamma^{ab}\,\psi \tag{1.36}$$

のように変換する場として定義される．ここで，γ^{ab} は，2 つのガンマ行列の反対称積

$$\gamma^{ab} = \frac{1}{2}\,(\gamma^a\,\gamma^b - \gamma^b\,\gamma^a) \tag{1.37}$$

である（付録 B.1 参照）．D 次元のガンマ行列は，反交換関係

$$\{\gamma^a,\,\gamma^b\} = 2\,\eta^{ab} \tag{1.38}$$

を満たす $2^{[D/2]}\times 2^{[D/2]}$ 行列である*5)．($[D/2]$ は，$D/2$ を超えない最大の整数を表す．たとえば，$D=4$ の場合は 2，$D=7$ の場合は 3 を表す.）ガンマ行列が掛かるスピノール場 $\psi(x)$ は，$[D/2]$ 成分をもっている．$D=4$ の場合は，よく知られているように，ガンマ行列は 4×4 行列であり，スピノール場は 4 成分をもつ．Minkowski 時空におけるスピノール場の Poincaré 変換は，(1.27) のような特別な一般座標変換と局所 Lorentz 変換を合わせた変換に対応する．

重力場に結合した質量 m のスピノール場のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -e\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,D_\mu\,\psi - m\,e\,\bar{\psi}\,\psi \tag{1.39}$$

である．ここで，$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0$ は ψ の Dirac 共役である．また，γ^μ は多脚場を使って $\gamma^\mu = \gamma^a e_a{}^\mu$ と定義されている．γ^a は定数行列であるが，γ^μ には $e_a{}^\mu(x)$ を通して座標依存性がある．(上の Dirac 共役の定義で使った γ^0 は，定数行列 $\gamma^{a=0}$ である.）スピノール場 ψ の共変微分は，

$$D_\mu\,\psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_\mu{}^{ab}\,\gamma_{ab}\right)\psi \tag{1.40}$$

と定義される．これは，局所 Lorentz 変換 (1.18), (1.36) に対して，

$$\delta_L\,(D_\mu\psi) = -\frac{1}{4}\,\lambda_{ab}\,\gamma^{ab}\,D_\mu\,\psi \tag{1.41}$$

---

*5) 一般の次元のガンマ行列のよりくわしい性質については，3.1 節で述べる．

のように共変的に変換する．スピノール場の局所 Lorentz 変換 (1.36), (1.41), および，$e_\mu{}^a$ の局所 Lorentz 変換 (1.17) を同時に行うと，このラグランジアンが不変であることがわかる．また，一般座標変換に対してラグランジアンは (1.10) のように変換し，したがって，作用は不変である．

スピノール場に対する共変微分 (1.40) の交換子は，ベクトル場に対する共変微分の交換子と同じように Riemann テンソルを使って表すことができ，

$$[D_\mu,\, D_\nu]\,\psi = \frac{1}{4}\,R_{\mu\nu}{}^{ab}\,\gamma_{ab}\,\psi \tag{1.42}$$

となる．

スピノール場を量子化する際には正準反交換関係を使い，その結果フェルミ粒子が現れる．そのため，古典的な理論ではフェルミオン場を互いに反交換する **Grassmann 数**に値をもつ場と考える．また，フェルミオン場の積の複素共役をとるときは，$(\psi_1\psi_2)^* = \psi_2^*\psi_1^*$ のように積の順序が入れ換わるものとする．この定義によると，ラグランジアン (1.39) からつくった作用は $S^* = S$ を満たす．

1.5 Yang–Mills 場

ゲージ群 G に基づいた **Yang–Mills 場**は，ベクトル場 $A_\mu^I(x)$ で表される．添字 I は，$I = 1, 2, \cdots, \dim G$ という値をとり，ゲージ群の随伴表現を表す．Yang–Mills 場を行列に値をもつ場

$$A_\mu(x) = -i\,g\,A_\mu^I(x)\,T_I \tag{1.43}$$

で表すと便利である．ここで，g は相互作用の強さを表す**ゲージ結合定数**である．T_I はゲージ群の Lie 代数のある表現の表現行列で，$f_{IJ}{}^K$ を構造定数とする交換関係と規格化条件

$$[T_I,\, T_J] = i\,f_{IJ}{}^K\,T_K, \qquad \mathrm{tr}(T_I\,T_J) = \frac{1}{2}\,\delta_{IJ} \tag{1.44}$$

を満たすとする．(1.43) を使うと，無限小ゲージ変換は，

$$\delta_g\,A_\mu = D_\mu\,v \equiv \partial_\mu v + [A_\mu,\, v], \qquad v(x) = -i\,v^I(x)\,T_I \tag{1.45}$$

と表される．ここで，$v^I(x)$ は任意関数の変換パラメータである．Yang–Mills 場の**場の強さ**（field strength）は，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\,A_\nu - \partial_\nu\,A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu] = -i\,g\,F_{\mu\nu}^I\,T_I \tag{1.46}$$

と定義される．これは，ゲージ変換 (1.45) に対して，

$$\delta_g\,F_{\mu\nu} = -[v,\, F_{\mu\nu}] \tag{1.47}$$

のように共変的に変換する．

Yang–Mills 場のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\, e\, g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\ \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}\, F_{\rho\sigma}) = -\frac{1}{4}\, e\, g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, F^I_{\mu\nu}\, F^I_{\rho\sigma} \tag{1.48}$$

である．このラグランジアンは，Minkowski 時空の場合と同じように，ゲージ変換 (1.45) に対して不変である．さらに，Yang–Mills 場のベクトル場としての一般座標変換と重力場の変換 (1.9) を同時に行えば，ラグランジアンは (1.10) のように全微分だけ変化する．したがって，作用は一般座標変換に対して不変である．

他の場との相互作用は，場の微分をゲージ変換に対する共変微分に置き換えることによって導入できる．このような相互作用を**ミニマル結合**（minimal coupling）という．例として，ゲージ変換に対して，

$$\delta_g\, \psi = -v\, \psi \tag{1.49}$$

のように変換するスピノール場 $\psi(x)$ を考えてみよう．変換のパラメータ v は，ゲージ群のある表現の表現行列 T_I を使って，(1.45) のように表されているとする．このスピノール場の共変微分は，局所 Lorentz 変換に対する共変微分 (1.40) に Yang–Mills 場の項を付け加えて，

$$D_\mu\, \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\, \omega_{\mu ab}\, \gamma^{ab} + A_\mu\right) \psi \tag{1.50}$$

で与えられる．ただし，(1.43) の T_I として，$\psi(x)$ の表現行列を使う．この共変微分は，ゲージ変換 (1.45), (1.49) に対して共変的に変換する．したがって，この共変微分を使った (1.39) の形のラグランジアンは，ゲージ変換に対して不変である．また，一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対する不変性も保たれる．

1.6 反対称テンソル場

高次元の超重力理論には，いろいろな階数の**反対称テンソル場**が含まれている*6)．n 階の反対称テンソル場 $B_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$ を考えよう．特別な場合として，$n=0$ のスカラー場と $n=1$ のベクトル場も含めて考えることができる．

ベクトル場と同様に，**場の強さ**を表す $n+1$ 階のテンソル

$$F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n+1}} = (n+1)\, \partial_{[\mu_1}\, B_{\mu_2\cdots\mu_{n+1}]} \tag{1.51}$$

を定義する．この場の強さは，**反対称テンソル場のゲージ変換**

$$\delta_g\, B_{\mu_1\cdots\mu_n} = n\, \partial_{[\mu_1}\, \zeta_{\mu_2\cdots\mu_n]} \tag{1.52}$$

---

*6) 反対称テンソル場は 4 次元の超重力理論には現れないので，この節の内容は，第 2 章を理解するには必要ない．

に対して不変である．変換パラメータ $\zeta_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}(x)$ は，添字について完全反対称である以外は任意の関数である．場の強さは，**Bianchi 恒等式**

$$\partial_{[\mu_1} F_{\mu_2\cdots\mu_{n+2}]} = 0 \tag{1.53}$$

を満たす．この恒等式は，場の強さが，(1.51) のように場 $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を使って表されているための必要条件である．場の強さの **Hodge 双対**を

$$(*F)^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} = \frac{1}{(n+1)!}\, e^{-1}\, \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}\nu_1\cdots\nu_{n+1}}\, F_{\nu_1\cdots\nu_{n+1}} \tag{1.54}$$

と定義すると，Bianchi 恒等式 (1.53) を

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,(*F)^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}}\right) = 0 \tag{1.55}$$

と書き直すことができる．

重力場以外との相互作用のない場合のゼロ質量のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(n+1)!}\, e\, F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\, F^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} \tag{1.56}$$

である．これを **Maxwell 型**のラグランジアンとよぶ．このラグランジアンから導かれる場の方程式は，

$$\partial_{\mu_1}\left(e\, F^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\right) = 0 \tag{1.57}$$

となる．$n=0$ と $n=1$ の場合は，それぞれ，ゼロ質量のスカラー場に対する Klein–Gordon 方程式と，ベクトル場に対する Maxwell 方程式になる．

Bianchi 恒等式 (1.55) と場の方程式 (1.57) を見比べると，よく似た形をしていることがわかる．特に，偶数次元 D における $n = \frac{1}{2}D - 1$ 階の反対称テンソル場の場合は，場の強さとその Hodge 双対は同じ階数 $\frac{1}{2}D$ をもち，その 2 つを入れ換えるような変換に対する対称性を考えることができる．これは，4 次元の電磁気学における電場と磁場の入れ換えに対する対称性を一般化したものである．このような対称性は，**双対対称性**とよばれ，超重力理論で重要な役割を果たす．双対対称性については，4.2 節でくわしく議論する．

1.6.1 双対な場による定式化

D 次元における n 階のゼロ質量の反対称テンソル場は，ゲージ不変性をもつため，その物理的自由度は場の横波成分 $B_{i_1\cdots i_n}$ $(i_1, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots, D-2)$ によって表される．したがって，${}_{D-2}\mathrm{C}_n$ 個の自由度をもつ．${}_{D-2}\mathrm{C}_n = {}_{D-2}\mathrm{C}_{D-n-2}$ なので，n 階の反対称テンソル場と $D-n-2$ 階の反対称テンソル場の自由度は等しい．このことから，n 階の反対称テンソル場の理論を，$D-n-2$ 階の反対称テンソル場の同値な理論に書き換えることができる場合がある．ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(n+1)!} e F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} F^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} + \frac{1}{(n+1)!} e F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} H^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} \tag{1.58}$$

という形をしている場合を考えよう．$H_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}$ は，他の場からつくられた $n+1$ 階の反対称テンソルである．反対称テンソル場 $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ は，場の強さを通してのみラグランジアンに現れていると仮定した．

このラグランジアンから導かれる場の方程式と Bianchi 恒等式は，

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,(F-H)^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\right) = 0, \tag{1.59}$$

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,(*F)^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}}\right) = 0 \tag{1.60}$$

である．場の方程式 (1.59) は，$*(F-H)_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}}$ が，局所的には，新しい $D-n-2$ 階の反対称テンソル場 $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ を使って，

$$*(F-H)_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} = (D-n-1)\,\partial_{[\mu_1}\tilde{B}_{\mu_2\cdots\mu_{D-n-1}]} \equiv \tilde{F}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} \tag{1.61}$$

と書けることを意味している．$\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ を，$B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に**双対な場**とよぶ．この双対な場を使うと，場の方程式 (1.59) と Bianchi 恒等式 (1.60) は，

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,(*\tilde{F})^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\right) = 0, \tag{1.62}$$

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,(\tilde{F}+*H)^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}}\right) = 0 \tag{1.63}$$

と書ける．これは，$\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ に対する Bianchi 恒等式と場の方程式と見なすことができる．$B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対する場の方程式が $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ に対する Bianchi 恒等式になり，$B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対する Bianchi 恒等式が $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ に対する場の方程式になった．新しい場の方程式 (1.63) は，ラグランジアン

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2(D-n-1)!} e \tilde{F}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} \tilde{F}^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} - \frac{1}{(D-n-1)!} e \tilde{F}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} (*H)^{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}} + \frac{1}{2(n+1)!} e H_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} H^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} \tag{1.64}$$

から導くことができる．$\tilde{\mathcal{L}}$ の最後の項は，$\tilde{F}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-1}}$ に依存しないので，場の方程式 (1.63) からは決まらないが，重力場についての変分（エネルギー・運動量テンソル）が $\mathcal{L}$ の場合と一致することから必要であることがわかる．

このように，ラグランジアン (1.58) をもつ反対称テンソル場 $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ の理論は，ラグランジアン (1.64) をもつ双対な反対称テンソル場 $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ の理論によっても記述できることがわかる．双対な場を使った理論の書き換えは，第 7 章の超重力理論の次元還元の議論で使う．

双対なラグランジアンの別の求め方

双対な場に対するラグランジアンを求める別の方法があり，実際の計算では，こちらを使ったほうが便利である．$F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}$ を独立な場とする．この場が，(1.51) のように $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を使って表されるようにするために，別の場 $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ を導入して，ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' = &-\frac{1}{2(n+1)!}\, e\, F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\, F^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} \\ &+\frac{1}{(n+1)!}\, e\, F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\, H^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} \\ &+\alpha\, \epsilon^{\nu_1\cdots\nu_{D-n-1}\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\, \tilde{B}_{\nu_2\cdots\nu_{D-n-1}}\, \partial_{\nu_1} F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}\end{aligned} \tag{1.65}$$

を考える．α は定数である．まず，$\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ について変分すると，Bianchi 恒等式 (1.60) が得られる．したがって，$F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}$ は，ポテンシャル $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を使って，(1.51) のように表せる．これをラグランジアン (1.65) に代入すると，もとのラグランジアン (1.58) が得られる．

一方，ラグランジアン (1.65) を $F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}$ について変分すると，(1.61) の形の式が得られる．これを F について解いて，ラグランジアン (1.65) に代入し，

$$\alpha = \frac{1}{(n+1)!\,(D-n-2)!} \tag{1.66}$$

と選ぶと，双対なラグランジアン (1.64) が得られる．

1.6.2　自己双対な場

$D = 4k + 2$（k は整数）の場合は，$2k$ 階反対称テンソル場の場の方程式として，1 階の微分方程式を考えることができる．場の方程式は，場の強さがその Hodge 双対に等しいことを表す

$$F^{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}} = *F^{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}} \tag{1.67}$$

である．これは，**自己双対方程式**（self-dual equation）とよばれる．一般に，偶数次元 D では，Hodge 双対を 2 回繰り返すと，

$$*^2 F = -(-1)^{\frac{1}{2}D}\, F \tag{1.68}$$

となる．したがって，自己双対な場は $D = 4k + 2$ の場合だけ矛盾なく定義できる．$D = 4k$ の場合は，(1.67) の右辺に虚数単位 i をつければ矛盾のない方程式になるが，その場合には複素数に値をもつ場を考えなければならない．そのような複素数場に対する 1 階の微分方程式の理論は，1 つの実数場に対する Maxwell 型の理論と等価であることが示せる．

$D = 4k + 2$ の場合の方程式 (1.67) に D_{μ_1} を作用すると，右辺は Bianchi 恒等式 (1.55) によってゼロになり，Maxwell 型の 2 階の場の方程式 (1.57) が得られる．したがって，自己双対な場は，通常の Maxwell 型の理論の場に，さら

に強い条件 (1.67) を課したものと見ることができる．

自己双対方程式 (1.67) を導く共変的なラグランジアンは簡単な形をしていない*7)．そのため，以下で自己双対な反対称テンソル場を含む理論を扱うときは，ラグランジアンではなく，場の方程式を使うことにする．

自己双対な反対称テンソル場は，10 次元や 6 次元の超重力理論に含まれている．たとえば，5.4 節で議論する $D=10$, $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論には，自己双対な 4 階の反対称テンソル場が含まれている．

1.6.3 Chern–Simons 型理論

奇数次元 D でも，$\frac{1}{2}(D-1)$ 階の反対称テンソル場に対して，1 階の微分方程式で表される場の方程式を考えることができる*8)．場の方程式は，場の強さの Hodge 双対が場に比例した形をしている．これは，一種の自己双対性であり，**奇数次元の自己双対性**（self-duality in odd dimensions）とよばれる．偶数次元の自己双対な場の場合と違い，そのような方程式を導く簡単な形の共変的なラグランジアンが存在する．時空の次元が $D=4k-1$ と $D=4k+1$ の 2 つの場合に分けて考えよう．

$D=4k-1$ の場合

まず，$D=4k-1$ の場合の $2k-1$ 階の反対称テンソル場を考えよう．場の方程式は，m を質量の次元をもつ定数として，

$$*F^{\mu_1\cdots\mu_{2k-1}} = m\,B^{\mu_1\cdots\mu_{2k-1}} \tag{1.69}$$

によって与えられる．偶数次元の場合と違い，場の強さの双対 $*F$ が場自身 B に比例している．この式は，両辺の Hodge 双対をとり，

$$F^{\mu_1\cdots\mu_{2k}} = -m\,*B^{\mu_1\cdots\mu_{2k}} \tag{1.70}$$

と書き直すこともできる．場の方程式 (1.69) は，ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{m}{2[(2k-1)!]^2}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{4k-1}}\,B_{\mu_1\cdots\mu_{2k-1}}\,\partial_{\mu_{2k}}\,B_{\mu_{2k+1}\cdots\mu_{4k-1}}\\ &-\frac{1}{2(2k-1)!}\,m^2\,e\,B_{\mu_1\cdots\mu_{2k-1}}\,B^{\mu_1\cdots\mu_{2k-1}}\end{aligned} \tag{1.71}$$

から変分原理によって導くことができる．このラグランジアンは，(1.52) のようなゲージ不変性をもっていない．このような反対称テンソル場の理論を，**Chern–Simons 型**の理論とよぶ．方程式 (1.70) の両辺に D_{μ_1} を作用して，右辺に (1.69) を使うと，

---

*7) N. Marcus and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B115** (1982) 111 ; P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6292.

*8) P.K. Townsend, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **B136** (1984) 38 [*Addendum: ibid.* **B137** (1984) 443].

$$D_{\mu_1} F^{\mu_1 \cdots \mu_{2k}} - m^2 B^{\mu_2 \cdots \mu_{2k}} = 0 \tag{1.72}$$

が得られる．これは，質量 m をもつ反対称テンソル場に対する **Proca 型**の場の方程式である．この方程式は，ラグランジアン

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\frac{1}{2(2k)!} e F_{\mu_1 \cdots \mu_{2k}} F^{\mu_1 \cdots \mu_{2k}} \\ & -\frac{1}{2(2k-1)!} m^2 e B_{\mu_1 \cdots \mu_{2k-1}} B^{\mu_1 \cdots \mu_{2k-1}} \end{aligned} \tag{1.73}$$

から変分原理によって導くことができる．今考えている場の方程式 (1.69) は，(1.72) よりも強い条件式である．

有質量の Chern–Simons 型理論，有質量の Proca 型理論，および，ゼロ質量の Maxwell 型理論によって記述される反対称テンソル場の物理的自由度を比較してみよう．まず，1.6.1 節で述べたように，Maxwell 型理論の物理的自由度は場の横波成分によって表され，その成分の数は ${}_{D-2}\mathrm{C}_{2k-1}$ である．質量をもった Proca 型理論はゲージ対称性をもっていないので，Maxwell 型理論よりも多くの自由度をもっている．物理的自由度は場の空間成分 $B_{i_1 \cdots i_{2k-1}}$ $(i_1, \cdots, i_{2k-1} = 1, 2, \cdots, D-1)$ によって表され，その成分の数は ${}_{D-1}\mathrm{C}_{2k-1}$ である．Chern–Simons 型理論の物理的自由度は，Proca 型の場合と同じく場の空間成分で表されるが，場の方程式が 1 階の微分方程式であるため，物理的自由度は Proca 型の場合の半分である．(1 階の場の方程式は解析力学の正準方程式（Hamilton の方程式）と解釈することができ，変数の半分が正準座標，残りの半分がそれに共役な正準運動量であると考えればよい．自由度は，正準座標の個数で数えている.）これらをまとめると，$D = 4k-1$ の場合のそれぞれの理論の物理的自由度は，

$$\begin{aligned} &\text{Maxwell 型}: {}_{D-2}\mathrm{C}_{2k-1} = \frac{(4k-3)!}{(2k-1)!\,(2k-2)!}, \\ &\text{Proca 型}: {}_{D-1}\mathrm{C}_{2k-1} = \frac{(4k-2)!}{(2k-1)!\,(2k-1)!}, \\ &\text{Chern–Simons 型}: \frac{1}{2} \cdot {}_{D-1}\mathrm{C}_{2k-1} = \frac{(4k-3)!}{(2k-1)!\,(2k-2)!} \end{aligned} \tag{1.74}$$

となる．したがって，$4k-1$ 次元の $2k-1$ 階の反対称テンソル場の場合，有質量の Chern–Simons 型理論は，ゼロ質量の Maxwell 型理論と同じ自由度をもっている．このことは，9.3 節で述べるように，高次元のゲージ化された超重力理論を構成する際に使われる．

$D = 4k+1$ の場合

次に，時空の次元が $D = 4k+1$ の場合の $2k$ 階の反対称テンソル場を考えよう．この場合は，下でわかるように，複素数に値をもつ場を考える必要がある．場の方程式は，

$$i *F^{\mu_1\cdots\mu_{2k}} = m\, B^{\mu_1\cdots\mu_{2k}} \tag{1.75}$$

である．左辺に虚数単位 i があることに注意せよ．この i の存在は，複素場を考えているために可能である．この方程式は，ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{i m}{[(2k)!]^2}\, \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{4k+1}}\, B^*_{\mu_1\cdots\mu_{2k}}\, \partial_{\mu_{2k+1}}\, B_{\mu_{2k+2}\cdots\mu_{4k+1}} \\ & - \frac{1}{(2k)!}\, m^2\, e\, B^*_{\mu_1\cdots\mu_{2k}}\, B^{\mu_1\cdots\mu_{2k}}\end{aligned} \tag{1.76}$$

から変分原理によって導くことができる．また，$D = 4k-1$ の場合と同様にして，(1.75) から Proca 型方程式

$$D_{\mu_1}\, F^{\mu_1\cdots\mu_{2k}} - m^2\, B^{\mu_2\cdots\mu_{2k}} = 0 \tag{1.77}$$

を導くことができる．もし場の方程式 (1.75) の左辺の i が無ければ，この Proca 型方程式の第 2 項の符号は逆になり，質量の 2 乗が負のタキオン的な場になってしまう．また，もし，$B_{\mu_1\cdots\mu_{2k}}$ が実数に値をもつ場だったら，ラグランジアン (1.76) の第 1 項は全微分になってしまい，意味のある理論にはならない．このような理由から，$B_{\mu_1\cdots\mu_{2k}}$ は複素場でなければならない．

実は，このような複素場に対する Chern–Simons 型理論は，1 つの実数場に対する Proca 型理論と等価である．これは次のようにしてわかる．まず，複素場を実部と虚部に分けて，

$$B_{\mu_1\cdots\mu_{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B^{(1)}_{\mu_1\cdots\mu_{2k}} + i\, B^{(2)}_{\mu_1\cdots\mu_{2k}}\right) \tag{1.78}$$

と表す．$B^{(1)}$, $B^{(2)}$ は実数に値をもつ場である．これを場の方程式 (1.75) に代入すると，方程式の実部と虚部から

$$\begin{aligned} B^{(1)}_{\mu_1\cdots\mu_{2k}} &= -\frac{1}{(2k+1)!\, m}\, e\, \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{4k+1}}\, F^{(2)\mu_{2k+1}\cdots\mu_{4k+1}}, \\ B^{(2)}_{\mu_1\cdots\mu_{2k}} &= \frac{1}{(2k+1)!\, m}\, e\, \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{4k+1}}\, F^{(1)\mu_{2k+1}\cdots\mu_{4k+1}} \end{aligned} \tag{1.79}$$

が得られる．(1.79) の下の式は，$B^{(2)}$ が $B^{(1)}$ を使って表せることを意味し，したがって，独立な場として $B^{(1)}$ だけを考えればよい．下の式を上の式の右辺に代入すると，$B^{(1)}$ だけを含む式が得られ，(1.77) の形の Proca 型方程式になる．

$D = 4k+1$ の場合の Chern–Simons 型理論も Maxwell 型理論と同じ自由度をもち，超重力理論の定式化で使われている．たとえば，9.3.2 節で述べるゲージ化された $D = 5$, $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論は，Chern–Simons 型理論で表される 2 階の反対称テンソル場を含んでいる．

第 2 章
4次元の超重力理論

この章では，4 次元の超重力理論について述べる．超重力理論は，局所超対称性をもつ重力理論である．まず，超 Poincaré 代数の既約表現によって決まる超多重項を求め，それを使った大局的超対称性をもつ場の理論について述べる．次に，局所超対称性を要請することにより超重力理論を導入する．また，複数の局所超対称性をもつ拡張された超重力理論についても述べる．

2.1　超代数と超多重項

素粒子は，**ボソン**（boson）と**フェルミオン**（fermion）の 2 種類に分けられる．ボソンは整数スピン 0, 1, 2, ⋯ をもち，Bose–Einstein 統計に従う．フェルミオンは半整数スピン $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ⋯ をもち，Fermi–Dirac 統計に従う．**超対称性**（supersymmetry）は，ボソンとフェルミオンの間の対称性である．超対称性をもつ理論では，いくつかのボソンとフェルミオンが集まって多重項をつくり，超対称性の変換によって結びついている．超対称性の変換は，Poincaré 対称性などの時空対称性の変換とともに，**超代数**（superalgebra）をつくる．この超代数には，時空の次元，時空対称性の種類，超対称性の生成子の個数などによって，いろいろな種類がある．

超 Poincaré 代数は，並進の生成子（運動量演算子）P_μ と Lorentz 変換の生成子 $M_{\mu\nu}$ ($M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$) からなる Poincaré 代数に，超対称性変換の生成子である**超電荷**（supercharge）Q_α を付け加えてできる代数である．(この章では，スピノール添字として $\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, 3, 4$ を使う．) Majorana スピノールの超電荷を 1 種類だけ含む場合を $\mathcal{N} = 1$ 超 Poincaré 代数とよび，その場合をまず考える．**Majorana スピノール** ψ は，**Majorana 条件** $\psi = \psi^c$ を満たすスピノールである．スピノールの荷電共役 ψ^c は，

$$\psi^c = C\,\bar{\psi}^T \tag{2.1}$$

と定義される．ここで，荷電共役行列 C は，

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C=-\gamma^{\mu T},\quad C^T=-C,\quad C^{\dagger}C=1 \tag{2.2}$$

を満たす 4×4 行列 である．$\mathcal{N}=1$ 超 Poincaré 代数の（反）交換関係は，

$$\begin{aligned}
&[M_{\mu\nu},\,M_{\rho\sigma}]=-i\,\eta_{\nu\rho}\,M_{\mu\sigma}+i\,\eta_{\nu\sigma}\,M_{\mu\rho}+i\,\eta_{\mu\rho}\,M_{\nu\sigma}-i\,\eta_{\mu\sigma}\,M_{\nu\rho},\\
&[M_{\mu\nu},\,P_{\rho}]=-i\,\eta_{\nu\rho}\,P_{\mu}+i\,\eta_{\mu\rho}\,P_{\nu},\\
&[P_{\mu},\,P_{\nu}]=0,\\
&[M_{\mu\nu},\,Q_{\alpha}]=\frac{1}{2}\,i\,(\gamma_{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\,Q_{\beta},\\
&[P_{\mu},\,Q_{\alpha}]=0,\\
&\{Q_{\alpha},\,\bar{Q}^{\beta}\}=-2\,i\,(\gamma^{\mu})_{\alpha}{}^{\beta}\,P_{\mu}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

である．ここで，$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ は Minkowski 時空の計量，$\gamma^{\mu\nu}=\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}$ はガンマ行列の反対称積である．超電荷はフェルミオン的な生成子であるため，超電荷どうしに対しては反交換関係になっている．

超対称性をもつ理論では，いくつかの異なるスピンの粒子が集まって多重項をつくる．これを**超多重項**（supermultiplet）という．超 Poincaré 代数の 1 粒子状態に対する既約表現を求めることにより，どのような粒子が超多重項をつくるかを知ることができる．まず，交換関係 (2.3) の 5 番目の式から，超多重項の中の 1 つの状態に Q_{α} を作用してできる状態は，すべて P_{μ} の同じ固有値 p_{μ} をもつことがわかる．また，$P_{\mu}P^{\mu}$ はすべての生成子と交換するので，1 つの超多重項の中のすべての状態の質量 $m^2=-p_{\mu}p^{\mu}$ は等しい．超多重項をつくる状態を求めるために，ガンマ行列の具体的な表示として

$$\gamma^0=-i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \gamma^i=-i\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\-\sigma_i&0\end{pmatrix}\quad (i=1,2,3) \tag{2.4}$$

を使う．ここで，σ_i は 2×2 Pauli 行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

である．この表示では，カイラリティ行列 $\gamma_5=i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ は対角形である．また，荷電共役行列 C と Majorana 超電荷 Q は

$$C=\begin{pmatrix}i\,\sigma_2&0\\0&-i\,\sigma_2\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}i\,\sigma_2\,Q^{\dagger T}\\Q\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

という形になる．超電荷の独立な成分は下の 2 成分 $Q_3,\,Q_4$ であり，上の 2 成分はそのエルミート共役を使って表すことができる．

まず，質量がゼロの 1 粒子状態からなる超多重項を考える．この場合は，運動量固有値が $p^{\mu}=(E,0,0,E)$ となる慣性系が存在し，そこでは超電荷の反交

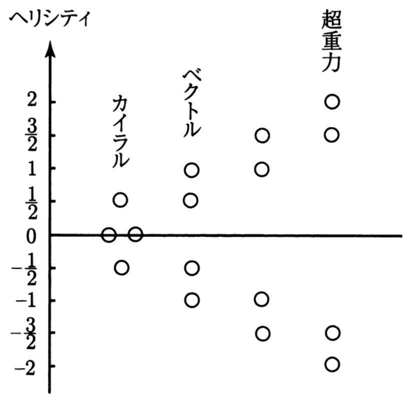


図 2.1　ゼロ質量超多重項.

換関係 (2.3) のうちゼロでないものは

$$\{Q_3,\,(Q_3)^\dagger\} = 4E \tag{2.7}$$

だけである．Q_4 は，自分自身を含めて Q のすべての成分と反交換するので，$Q_4 = 0$ とみなしてよい．Q_3 を使って

$$b = (4E)^{-\frac{1}{2}}\,Q_3, \qquad b^\dagger = (4E)^{-\frac{1}{2}}\,Q_3^\dagger \tag{2.8}$$

とおくと，これらはフェルミオンの生成・消滅演算子と同じ反交換関係

$$\{b,\,b^\dagger\} = 1, \quad \{b,\,b\} = 0, \quad \{b^\dagger,\,b^\dagger\} = 0 \tag{2.9}$$

を満たしている．したがって，その表現の基底は

$$|h\rangle\,, \qquad b^\dagger\,|h\rangle \tag{2.10}$$

で与えられる．ここで，$|h\rangle$ は $b\,|h\rangle = 0$ を満たすヘリシティ h の状態を表す．(2.3) の 4 番目の交換関係から $[M_{12}, b^\dagger] = \frac{1}{2}b^\dagger$ が得られ，$b^\dagger$ がヘリシティ $\frac{1}{2}$ をもつことがわかる．したがって，これらの状態はヘリシティ $(h,\ h+\frac{1}{2})$ をもつ．場の理論の CPT 定理によると，ヘリシティが h の状態が存在すれば $-h$ の状態も存在するので，場の理論で実現される超多重項は

$$\left(h,\ h+\tfrac{1}{2}\right)\ \oplus\ \left(-h-\tfrac{1}{2},\ -h\right) \qquad \left(h = 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \cdots\right) \tag{2.11}$$

となる．$h = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}$ の場合の超多重項を，図 2.1 に示した．よく使われるゼロ質量超多重項は，

$$\begin{aligned} &\textbf{カイラル多重項}:\ \left(0,\ \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(-\tfrac{1}{2},\ 0\right), \\ &\textbf{ベクトル多重項}:\ \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \oplus \left(-1,\ -\tfrac{1}{2}\right), \\ &\textbf{超重力多重項}:\ \left(\tfrac{3}{2},\ 2\right) \oplus \left(-2,\ -\tfrac{3}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

である．

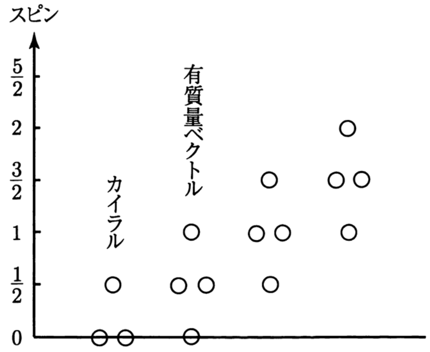


図 2.2　有質量超多重項.

ゼロでない質量 m をもつ 1 粒子状態の場合は，運動量固有値が $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ となる慣性系が存在し，そこでは，(2.3) の超電荷 Q_α ($\alpha = 3,\ 4$) の反交換関係は

$$\{Q_\alpha,\, (Q_\beta)^\dagger\} = 2\, m\, \delta_{\alpha\beta} \tag{2.13}$$

となる．これは，$b_\alpha = (2m)^{-\frac{1}{2}} Q_\alpha,\, b^\dagger_\alpha = (2m)^{-\frac{1}{2}} Q^\dagger_\alpha$ が，2 種類のフェルミオンの生成・消滅演算子と同じ反交換関係を満たすことを示している．したがって，その表現の基底は

$$|s\rangle\,, \quad b^\dagger_\alpha\, |s\rangle\,, \quad b^\dagger_3\, b^\dagger_4\, |s\rangle \tag{2.14}$$

で与えられる．$|s\rangle$ は $b_\alpha\, |s\rangle = 0$ を満たすスピン s の $2s+1$ 個の状態を表す．(2.3) の 4 番目の交換関係から $b^\dagger_\alpha$ はスピン $\frac{1}{2}$ をもつことがわかるので，角運動量の合成則を使うと，これらの状態のスピンは

$$\left(s - \tfrac{1}{2},\ s,\ s,\ s + \tfrac{1}{2}\right) \qquad \left(s = 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \cdots\right) \tag{2.15}$$

となる．ただし，$s = 0$ の場合は $s - \frac{1}{2}$ の状態はない．$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ の場合の超多重項を，図 2.2 に示した．よく使われる超多重項は，

$$\begin{aligned} &\textbf{カイラル多重項}:\ \left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\right), \\ &\textbf{有質量ベクトル多重項}:\ \left(0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

である．

質量がゼロの場合もゼロでない場合も，1 つの超多重項に含まれるボソン的状態の個数とフェルミオン的状態の個数は同じである．

2.2　超対称な場の理論

超対称性をもつ場の理論を構成するには，場も超多重項の形で導入する．スピンが 1 以下の場だけを扱う理論では，2 種類の場の超多重項

$$\begin{aligned}&\textbf{ベクトル多重項}：(\,A^I_\mu,\ \chi^I,\ D^I\,)\quad (I=1,2,\cdots,\dim G)\\&\textbf{カイラル多重項}：(\,\phi_i,\ \psi_{-i},\ F_i\,)\quad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{2.17}$$

を使う．ベクトル多重項は，ベクトル場 $A^I_\mu(x)$, Majorana スピノール場 $\chi^I(x)$, 実スカラー場 $D^I(x)$ からなり，すべてゲージ群 G の随伴表現に属する．カイラル多重項は，複素スカラー場 $\phi_i(x)$, $F_i(x)$, 負カイラリティ Weyl スピノール場 $\psi_{-i}(x)$ $(\gamma_5\psi_{-i}=-\psi_{-i})$ からなり，すべて G のある同じ n 次元表現に属する．場 D^I と F_i は物理的自由度をもたない**補助場** (auxiliary field) であり，場の方程式を使うと他の場で表すことができる．これらの場に対する超対称性をもつラグランジアンを系統的に構成するには，**超場**（superfield）の方法*1) を使うと便利である．

超対称な場の理論の簡単な例として，1 個のカイラル多重項 $(\phi,\ \psi_-,F)$ からなる理論（**Wess–Zumino 模型**）を考えよう．ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-\bar\psi_-\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-+F^*F+W'(\phi)F+(W'(\phi))^*F^*\\&-\frac{1}{2}W''(\phi)\bar\psi_+\psi_--\frac{1}{2}(W''(\phi))^*\bar\psi_-\psi_+\end{aligned}\tag{2.18}$$

である．ここで，$W(\phi)$ は複素スカラー場 ϕ の正則な（つまり，ϕ^* に依存しない）関数であり，**超ポテンシャル**（superpotential）とよばれる．また，ψ_- の荷電共役を $\psi_+=(\psi_-)^c$ とおいた．ψ_+ は正のカイラリティをもつスピノール場である．このラグランジアンは，**超変換**

$$\begin{aligned}&\delta_Q\phi=\frac{1}{2}\bar\epsilon_+\psi_-,\\&\delta_Q\psi_-=\frac{1}{2}\gamma^\mu\epsilon_+\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}F\epsilon_-,\\&\delta_Q F=\frac{1}{2}\bar\epsilon_-\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-\end{aligned}\tag{2.19}$$

に対して全微分だけ変化する．したがって，ラグランジアンを時空について積分して得られる作用は不変である．変換のパラメータ $\epsilon=\epsilon_++\epsilon_-$ は，定数 Majorana スピノールであり，$\epsilon_\pm$ はその正，負のカイラリティへの射影である．変換のパラメータがフェルミオン的な量なので，変換によってボソン場とフェルミオン場が入れ代わっている．パラメータが ϵ_1 と ϵ_2 の 2 つの超変換の交換関係を計算すると，すべての場に対して，

$$[\delta_Q(\epsilon_1),\,\delta_Q(\epsilon_2)]=\delta_P(\xi),\qquad \xi^\mu=\frac{1}{4}\bar\epsilon_2\gamma^\mu\epsilon_1\tag{2.20}$$

となる．ここで，$\delta_P(\xi)$ は，ベクトル ξ^μ をパラメータとする無限小の並進を表す．この交換関係は，超 Poincaré 代数 (2.3) の最後の反交換関係に対応している．

ラグランジアンからつくった作用を補助場 F について変分すると，

---

*1） 参考文献 [5]，[7]，[8] を参照せよ．

$$F^* = -W'(\phi) \tag{2.21}$$

が得られ，F を ϕ を使って表すことができる．これをラグランジアンに代入すると，F を含まないラグランジアンが得られる．たとえば，超ポテンシャルとして

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\,m\,\phi^2 + \frac{1}{6}\,\lambda\,\phi^3 \tag{2.22}$$

を選ぶと，得られるラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi - \bar{\psi}_-\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi_- - \left|m\,\phi + \frac{1}{2}\,\lambda\,\phi^2\right|^2 \\ & - \frac{1}{2}\,(m + \lambda\,\phi)\,\bar{\psi}_+\,\psi_- - \frac{1}{2}\,(m + \lambda\,\phi^*)\,\bar{\psi}_-\,\psi_+\end{aligned} \tag{2.23}$$

となる．場 ϕ と ψ_- は，同じ質量 m をもつ 2 個の実スカラー粒子とスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を表している．これらは，(2.16) のカイラル多重項 $(0,\ 0,\ \frac{1}{2})$ をつくっている．また，いろいろな相互作用の結合定数が超対称性によって結びついている．たとえば，$|\phi|^4$ の結合定数と Yukawa 結合 $\phi\bar{\psi}_+\psi_-$ の結合定数は，同じ λ で与えられている．

2.3 $\mathcal{N} = 1$ Poincaré 超重力理論

場の理論が大局的な内部対称性をもつ場合に，ゲージ場を導入することにより，変換のパラメータが時空の座標の任意関数であるような局所的な内部対称性をもつ理論を構成することができた．同様に，上で議論した大局的超対称性をもつ理論に，超対称性のゲージ場を導入して，**局所超対称性**をもつ理論を構成することを考えよう．

超変換のパラメータはスピノール ϵ_α $(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ なので，それに対するゲージ場はスピノール添字 α とベクトル添字 μ の両方をもつ場 $\psi_{\mu\alpha}(x)$ であると考えられる．このような場は **Rarita–Schwinger 場**とよばれ，量子化するとスピン $\frac{3}{2}$ の粒子を表す．内部対称性のゲージ場の場合の経験から，Rarita–Schwinger 場は，局所超変換に対して $\delta_Q\psi_{\mu\alpha}(x) = \partial_\mu\epsilon_\alpha(x) +$(場に依存した項) のように変換すると予想される．局所超対称性をもつ理論を構成するには，さらに別のゲージ場も必要である．超 Poincaré 代数 (2.3) では，2 つの超電荷の反交換関係が並進の生成子になる．したがって，局所超対称性をもつ理論は，局所的な並進対称性ももっていなければならず，それに対するゲージ場も必要である．局所的な並進とは一般座標変換のことなので，それに対するゲージ場は重力場である．

このような一般座標変換と局所超変換に対して不変な理論を**超重力理論** (supergravity) という．超重力理論は，ゲージ場としてスピン 2 の重力場とスピ

ン $\frac{3}{2}$ の Rarita–Schwinger 場を含んでいる．2.1 節で求めた超 Poincaré 代数のゼロ質量の超多重項 (2.12) の中には，ちょうどヘリシティが $(\frac{3}{2},2)\oplus(-2,-\frac{3}{2})$ の超多重項（超重力多重項）が含まれているので，これを使って局所超対称性をもつ理論を構成することができる*2)．この理論は $D=4$, $\mathcal{N}=1$ 超重力理論とよばれる．

$D=4$, $\mathcal{N}=1$ 超重力理論に含まれている場は，重力場 ${e_\mu}^a(x)$ と Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$ である．超対称性をもつ理論はフェルミオン場を含むので，重力場を四脚場 ${e_\mu}^a(x)$ で表す．1.2.2 節で述べたように，計量は $g_{\mu\nu}={e_\mu}^a{e_\nu}^b\eta_{ab}$ のように表される．ここで，$\eta_{ab}=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ は，平坦な Minkowski 計量である．Rarita–Schwinger 場は，Majorana 条件 $\psi^c_\mu=\psi_\mu$ を満たす．ラグランジアンは，Einstein 項と Rarita–Schwinger 項からなり，

$$\mathcal{L}=e\,\hat{R}-\frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,\hat{D}_\nu\,\psi_\rho, \tag{2.24}$$

で与えられる．ここで，$e=\det {e_\mu}^a$ であり，$\gamma^{\mu\nu\rho}=\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$ は，付録 B.1 で定義したガンマ行列の反対称積を表す．曲率と共変微分は

$$\begin{aligned}
&\hat{R}={e_a}^\mu\,{e_b}^\nu\,{\hat{R}_{\mu\nu}}{}^{ab},\\
&{\hat{R}_{\mu\nu}}{}^{ab}=\partial_\mu\,{\hat{\omega}_\nu}{}^{ab}-\partial_\nu\,{\hat{\omega}_\mu}{}^{ab}+{\hat{\omega}_\mu}{}^a{}_c\,{\hat{\omega}_\nu}{}^{cb}-{\hat{\omega}_\nu}{}^a{}_c\,{\hat{\omega}_\mu}{}^{cb},\\
&\hat{D}_{[\nu}\,\psi_{\rho]}=\left(\partial_{[\nu}+\frac{1}{4}\,{\hat{\omega}_{[\nu}}{}^{ab}\,\gamma_{ab}\right)\psi_{\rho]}
\end{aligned}\tag{2.25}$$

と定義される．スピン接続 ${\hat{\omega}_\mu}{}^{ab}$ は，

$$\hat{\omega}_{\mu ab}=\omega_{\mu ab}+\frac{1}{8}\left(\bar{\psi}_a\,\gamma_\mu\,\psi_b+\bar{\psi}_\mu\,\gamma_a\,\psi_b-\bar{\psi}_\mu\,\gamma_b\,\psi_a\right) \tag{2.26}$$

で与えられる．$\omega_{\mu ab}$ は，捩率のない通常のスピン接続 (1.21) である．スピン接続 (2.26) は，Rarita–Schwinger 場に依存した捩率

$$\hat{D}_\mu\,{e_\nu}^a-\hat{D}_\nu\,{e_\mu}^a=\frac{1}{4}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^a\,\psi_\nu. \tag{2.27}$$

をもつ．ラグランジアンを捩率のないスピン接続 $\omega_{\mu ab}$ を使って表すこともできる．その場合は，

$$\mathcal{L}=e\,R-\frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi_\rho+(4\text{ 体フェルミ相互作用項}) \tag{2.28}$$

のように，あらわな 4 体フェルミ相互作用項が現れる．この式では，R と D_ν は，捩率のないスピン接続 $\omega_{\mu ab}$ を使って，(2.25) のように定義されている．

ラグランジアン (2.24) からつくった作用は，3 種類の局所変換

*2) D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3214; S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **B62** (1976) 335.

(i) 一般座標変換

$$\delta_G(\xi)\, e_\mu{}^a = \xi^\nu\, \partial_\nu\, e_\mu{}^a + \partial_\mu\, \xi^\nu\, e_\nu{}^a, \qquad \delta_G(\xi)\, \psi_\mu = \xi^\nu\, \partial_\nu\, \psi_\mu + \partial_\mu\, \xi^\nu\, \psi_\nu, \tag{2.29}$$

(ii) 局所 Lorentz 変換

$$\delta_L(\lambda)\, e_\mu{}^a = -\lambda^a{}_b\, e_\mu{}^b, \qquad \delta_L(\lambda)\, \psi_\mu = -\frac{1}{4}\, \lambda^{ab}\, \gamma_{ab}\, \psi_\mu, \tag{2.30}$$

(iii) 局所超変換

$$\delta_Q(\epsilon)\, e_\mu{}^a = \frac{1}{4}\, \bar\epsilon\, \gamma^a\, \psi_\mu, \qquad \delta_Q(\epsilon)\, \psi_\mu = \hat{D}_\mu\, \epsilon \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\, \hat\omega_\mu{}^{ab}\, \gamma_{ab}\right) \epsilon \tag{2.31}$$

に対して不変である．変換のパラメータ $\xi^\mu(x)$, $\lambda^a{}_b(x)$ $(\lambda^{ab} = -\lambda^{ba})$, $\epsilon_\alpha(x)$ $(\epsilon^c = \epsilon)$ は，時空の座標 x^μ の任意関数である．ボソン的な変換 (i), (ii) に対する不変性は明白である．局所超変換 (iii) に対する不変性は，付録 C.1 で示す．これらの局所変換の交換関係を計算すると，

$$\begin{aligned}
&[\delta_G(\xi_1),\, \delta_G(\xi_2)] = \delta_G(\xi_2 \cdot \partial\, \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial\, \xi_2), \\
&[\delta_L(\lambda_1),\, \delta_L(\lambda_2)] = \delta_L([\lambda_1,\, \lambda_2]), \\
&[\delta_G(\xi),\, \delta_L(\lambda)] = \delta_L(-\xi \cdot \partial\, \lambda), \\
&[\delta_G(\xi),\, \delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(-\xi \cdot \partial\, \epsilon), \\
&[\delta_L(\lambda),\, \delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(\tfrac{1}{4}\, \lambda^{ab}\, \gamma_{ab}\, \epsilon), \\
&[\delta_Q(\epsilon_1),\, \delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(-\xi \cdot \hat\omega) + \delta_Q(-\xi \cdot \psi)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

のように再び局所変換で表すことができ，閉じた代数をつくっている．ここで，最後の交換関係 $[\delta_Q, \delta_Q]$ の右辺に現れる変換パラメータは，

$$\xi^\mu = \frac{1}{4}\, \bar\epsilon_2\, \gamma^\mu\, \epsilon_1 \tag{2.33}$$

である．最後の交換関係は付録 C.2 で示す．それ以外は容易に確かめられる．最後の交換関係を示すには，ラグランジアン (2.24) から導いた場の方程式を使う必要がある．この意味で，代数は**オン・シェル**（on-shell）でのみ閉じているという．今考えている理論では，物理的自由度をもたないいくつかの**補助場**を導入することによって，場の方程式を使わずに（**オフ・シェル**（off-shell）で）代数を閉じさせることができる*3)．オフ・シェルで閉じる代数をもつ理論は，物質超多重項と結合させる際や，局所対称性のゲージ固定をして量子化する際に

---

*3) 参考文献 [10] を参照せよ．

便利である．しかし，一般的な超重力理論（拡張された超対称性をもつ理論や高次元時空の理論）では，そのようなオフ・シェルの定式化は知られていない．

この局所変換の交換関係 (2.32) と超 Poincaré 代数の交換関係 (2.3) を比べてみよう．超 Poincaré 代数の $\{Q, \bar{Q}\} = -2i\gamma^a P_a$ に対応して，2 つの局所超変換の交換関係に一般座標変換が現れるなど，よく似た部分もあるが，完全に同じではない．特に，(2.32) の右辺の変換パラメータは，一般に場に依存している．2 つの交換関係の正確な対応関係は次のように理解できる．まず，超 Poincaré 代数は，Minkowski 時空上の理論の対称性を表していることに注意する．ラグランジアン (2.24) から導かれる場の方程式は，Minkowski 時空

$$e_\mu{}^a = \delta_\mu^a, \qquad \psi_\mu = 0 \tag{2.34}$$

を解にもっている．この解を**背景場**として，そのまわりの場の微小なゆらぎに対する理論を考えよう．そのような理論の対称性は，背景場のもつ対称性で与えられる．解 (2.34) を不変に保つ一般座標変換と局所 Lorentz 変換は，1.2.2 節で議論したように，(1.27) をパラメータとする Poincaré 変換である．また，この解を不変に保つ局所超変換は，

$$\delta_Q\, \psi_\mu = \partial_\mu\, \epsilon = 0 \tag{2.35}$$

から，定数スピノール ϵ による変換である．($\psi_\mu = 0$ なので，$\delta_Q e_\mu{}^a = 0$ は自動的に成り立つ.）このような Minkowski 時空解を不変に保つ変換パラメータを使った局所変換の交換関係を求め，その結果に現れる場の依存性に解 (2.34) を代入すると，それが超 Poincaré 代数の交換関係と正確に対応することがわかる．一般に，Minkowski 時空を場の方程式の解としてもつ超重力理論を，**Poincaré 超重力理論**とよぶ．

この理論は，局所的対称性の他に大局的対称性ももっており，ラグランジアン (2.24) は，変換のパラメータ Λ が定数である大局的カイラル $U(1)$ 変換

$$\delta\, e_\mu{}^a = 0, \qquad \delta\,\psi_\mu = i\,\Lambda\,\gamma_5\,\psi_\mu \tag{2.36}$$

に対して不変である．単純な位相変換 $\delta\psi_\mu = i\Lambda\psi_\mu$ は ψ_μ に対する Majorana 条件と矛盾するが，このカイラル変換は矛盾しない．このような大局的対称性は，拡張された超対称性をもつ理論や高次元の理論で重要な役割を果たす．

超重力多重項だけからなるラグランジアン (2.24) に，物質場の超多重項として，ベクトル多重項とカイラル多重項 (2.17) を結合させた理論を構成することができる．この場合のラグランジアンと超変換は，超場を使った方法やテンソル解析の方法などによって求めることができる*4)．

*4）参考文献 [5]，[10] を参照せよ．

2.4 $\mathcal{N}=1$ AdS 超重力理論

$\mathcal{N}=1$ 超重力理論のラグランジアン (2.24) に**宇宙項**を付け加えた理論を考えることができる*5). ラグランジアンは,

$$\mathcal{L} = e\,\hat{R} + 6\,m^2\,e - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,\hat{D}_\nu\,\psi_\rho + \frac{1}{2}\,m\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu}\,\psi_\nu \tag{2.37}$$

である. 第 2 項が宇宙項で, 第 1 章の (1.2) と比べると, 宇宙定数は負の値 $\Lambda = -3m^2$ をもつことがわかる. 最後の項は, Rarita–Schwinger 場の質量項であり, 宇宙項に現れるパラメータ m に比例している. $m=0$ とすると, Poincaré 超重力理論のラグランジアンに帰着する. 宇宙定数を正にするには m を純虚数にとればよいが, そうすると Rarita–Schwinger 場の質量項が実数でなくなってしまうため, 宇宙定数が負の場合だけが可能である.

このラグランジアンからつくった作用は, 一般座標変換 (2.29), 局所 Lorentz 変換 (2.30), および, 局所超変換

$$\begin{aligned} \delta_Q\,e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}\,\gamma^a\,\psi_\mu, \\ \delta_Q\,\psi_\mu &= \hat{D}_\mu\,\epsilon + \frac{1}{2}\,m\,\gamma_\mu\,\epsilon \end{aligned} \tag{2.38}$$

に対して不変である. 超変換の形は, $m=0$ の場合の (2.31) と比べて, $\delta_Q\psi_\mu$ に m に比例した項が付け加わっている. 局所変換の交換関係は, $m=0$ の場合の (2.32) と同じ形になる. ただし, $[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]$ の右辺に現れる局所 Lorentz 変換のパラメータは変更を受け,

$$\lambda_{ab} = -\xi^\mu\,\omega_{\mu ab} - \frac{1}{4}\,m\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma_{ab}\,\epsilon_1 \tag{2.39}$$

で与えられる. Rarita–Schwinger 場の質量項のために, 大局的カイラル $U(1)$ 変換 (2.36) に対してラグランジアンは不変ではない.

ラグランジアン (2.37) から導かれる場の方程式の解を考えよう. $\psi_\mu = 0$ の場合を考えると, Rarita–Schwinger 場の方程式は自動的に満たされ, 重力場の方程式は,

$$R_{\mu\nu} = -3\,m^2\,g_{\mu\nu} \tag{2.40}$$

となる. Minkowski 時空 $e_\mu{}^a = \delta_\mu^a$ は, $R_{\mu\nu}=0$ を満たすので, この方程式の解にはなっていない. この方程式の解のうち, Minkowski 時空と同じように高い対称性をもつ解は, **反 de Sitter 時空** (anti de Sitter spacetime, AdS 時空) *6) である. 反 de Sitter 時空の Riemann テンソルは,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -m^2\,(g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}) \tag{2.41}$$

---

*5) P.K. Townsend, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2802.

*6) 反 de Sitter 時空の定義については, 付録 D.1 を参照せよ.

のように計量を使って表すことができ，これから Ricci テンソルを計算すると (2.40) を満たすことが確かめられる．この理論のように，反 de Sitter 時空を場の方程式の解としてもつ超重力理論を，**AdS 超重力理論**とよぶ．

反 de Sitter 時空はアイソメトリとして高い対称性をもつ時空で，Minkowski 時空が Poincaré 対称性をもつように，$SO(2,3)$ 対称性をもっている．Poincaré 群の生成子の個数は，並進 4 個と Lorentz 変換 6 個の合わせて 10 個であるが，$SO(2,3)$ も 10 個の生成子をもっている．一般に，D 次元空間（時空）がもちうる対称性の生成子の最大の個数は $\frac{1}{2}D(D+1)$ であり，そのような場合の空間を**極大対称空間**とよぶ*7)．Minkowski 時空と反 de Sitter 時空は，極大対称空間である．また，正の宇宙項をもつ Einstein 方程式の解である **de Sitter 時空**は，$SO(1,4)$ 対称性をもつ極大対称空間である．Riemann テンソルを (2.41) のように計量を使って表せること（ただし，右辺の定数係数は負である必要はない）は，極大対称空間の特徴である．

反 de Sitter 時空解は，大局的超対称性ももっていることが次のようにわかる．場の方程式の解が超対称性をもつためには，その解に対して超変換 (2.38) の右辺がゼロになっている必要がある．$\psi_\mu = 0$ の場合は，$e_\mu{}^a$ の超変換は自動的にゼロになっている．ψ_μ の超変換がゼロになることから，

$$\left(D_\mu + \frac{1}{2}\, m\, \gamma_\mu\right) \epsilon = 0 \tag{2.42}$$

が得られる．これは，超変換のパラメータ ϵ に対する微分方程式であり，その解は **Killing スピノール**とよばれる．Killing スピノールが存在すれば，解は超対称性をもっている．(2.42) は $\mu = 0,1,2,3$ の 4 つの方程式からなり，それらが矛盾なく解をもつためには，**積分可能条件**

$$\begin{aligned} 0 &= \left[D_\mu + \frac{1}{2}\, m\, \gamma_\mu,\ D_\nu + \frac{1}{2}\, m\, \gamma_\nu\right] \epsilon \\ &= \frac{1}{4}\left(R_{\mu\nu}{}^{ab} + 2\, m^2\, e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b\right) \gamma_{ab}\, \epsilon \end{aligned} \tag{2.43}$$

が成り立つことが必要である．反 de Sitter 時空の場合は，最後の式に (2.41) を代入するとゼロになり，確かに積分可能条件が成り立っていることがわかる．実際 (2.42) の解は存在し，具体的に構成されている*8)．このように，反 de Sitter 時空解は，大局的な超対称性をもつ．

Killing スピノールをパラメータとする超変換と $SO(2,3)$ の変換を合わせたものは，閉じた超代数をつくり，$\boldsymbol{OSp(1|4)}$（OSp は Ortho-Symplectic の略）とよばれる．これは，Minkowski 時空の場合の超 Poincaré 代数に対応するものである．このような反 de Sitter 時空上の超対称性の代数を，**超反 de Sitter 代数**という．3.5 節で一般的な超反 de Sitter 代数について述べる．

---

*7) たとえば，参考文献 [1] の第 13 章を参照せよ．

*8) P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, *Ann. Phys.* **144** (1982) 249.

2.5 拡張された超対称性

これまでは，超電荷として Majorana スピノール Q を 1 個だけ含む $\mathcal{N}=1$ 超対称性について考えてきた．より一般的には，$\mathcal{N}$ 個の Majorana スピノール超電荷 Q^i $(i=1,2,\cdots,\mathcal{N})$ を含む**拡張された超対称性**（extended supersymmetry）を考えることができる*9)．超電荷どうしの反交換関係は，

$$\{Q^i_\alpha,\, \bar{Q}^{j\beta}\} = -2\,i\,(\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta\, P_\mu\, \delta^{ij} + \delta^\beta_\alpha\, U^{ij} + i\,(\gamma_5)_\alpha{}^\beta\, V^{ij} \tag{2.44}$$

となる．ここで，$U^{ij}=-U^{ji}$, $V^{ij}=-V^{ji}$ は**中心電荷**（central charge）とよばれる生成子で，超 Poincaré 代数のすべての生成子と交換する．その他の交換関係は，(2.3) と同じ形である．

2.1 節と同様にして，この超代数の可能な超多重項を求めることができる．質量がゼロで，中心電荷の固有値がゼロの場合の超多重項を考えよう．この場合，(2.8) のように，超電荷の成分からフェルミオンの生成・消滅演算子と同じ反交換関係を満たす $\mathcal{N}$ 個の演算子の組 $(b^i, b^{i\dagger})$ $(i=1,2,\cdots,\mathcal{N})$ が得られる．したがって，超多重項の状態は

$$|h\rangle\,, \quad b^{i\dagger}\,|h\rangle\,, \quad b^{i\dagger}\,b^{j\dagger}\,|h\rangle\,, \quad \cdots, \quad b^{1\dagger}\,b^{2\dagger}\cdots b^{\mathcal{N}\dagger}\,|h\rangle \tag{2.45}$$

と表される．$b^{i\dagger}$ はヘリシティ $\frac{1}{2}$ をもっているので，これらの状態のヘリシティは，

$$h, \quad h+\tfrac{1}{2}, \quad h+1, \quad \cdots, \quad h+\tfrac{1}{2}\mathcal{N} \tag{2.46}$$

である．ヘリシティ $h+\frac{1}{2}n$ の状態は，反交換する n 個の $b^{i\dagger}$ を含んでいるので，独立な状態の個数は ${}_{\mathcal{N}}\mathrm{C}_n$ である．(2.46) から，$\mathcal{N}>8$ の場合，すべての超多重項がヘリシティの絶対値が 2 よりも大きい粒子を含むことがわかる．しかし，相互作用がある場合，そのように大きなヘリシティの粒子を含む矛盾のない場の理論は知られていない．したがって，$\mathcal{N}=8$ の場合が，相互作用のある場の理論によって実現されている最大の超対称性である．

含まれる最大のヘリシティが 1 の場合と 2 の場合の超多重項について，各ヘリシティ状態の個数を，表 2.1 と表 2.2 に示した．これらの 2 つの場合の超多重項は，それぞれ，**ゲージ多重項**（ベクトル多重項）と**超重力多重項**とよばれる．これらの表には，場の理論の CPT 定理によって要求されるヘリシティが逆符号の状態も含めてある．ただし，ゲージ多重項 の $\mathcal{N}=4$ と超重力多重項の $\mathcal{N}=8$ は，1 つの多重項だけで CPT 定理から要求されるヘリシティをすべて含んでいる．また，ゲージ多重項の $\mathcal{N}=3$ と $\mathcal{N}=4$, 超重力多重項の $\mathcal{N}=7$ と $\mathcal{N}=8$ は，それぞれ，同じ状態を含んでいるので，同じ理論を与えると考えられる．

*9) R. Haag, J.T. Łopuszański and M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

表 2.1　ゲージ多重項.

[redacted]				
$+1$	1	1	1	1
$+\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**3 + 1**	**4**
0		$1+1$	$3+3$	6
$-\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**1 + 3**	**4**
-1	1	1	1	1

表 2.2　超重力多重項.

[redacted]								
$+2$	1	1	1	1	1	1	1	1
$+\frac{3}{2}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7 + 1**	**8**
$+1$		1	3	6	10	$15+1$	$21+7$	28
$+\frac{1}{2}$			**1**	**4**	**10 + 1**	**20 + 6**	**35 + 21**	**56**
0				$1+1$	$5+5$	$15+15$	$35+35$	70
$-\frac{1}{2}$			**1**	**4**	**1 + 10**	**6 + 20**	**21 + 35**	**56**
-1		1	3	6	10	$1+15$	$7+21$	28
$-\frac{3}{2}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1 + 7**	**8**
-2	1	1	1	1	1	1	1	1

表 2.2 の超重力多重項を使って，拡張された局所超対称性をもつ超重力理論（**拡張された超重力理論**（extended supergravity））を構成することができる．対応する場の超重力多重項を，第 3 章の表 3.3 にまとめた．拡張された超重力理論は，一般には，重力場と $\mathcal{N}$ 個の Rarita–Schwinger 場の他に，ベクトル場，スピノール場，スカラー場を含んでいる．上に述べたように，$\mathcal{N}=8$ よりも大きな超対称性をもった理論は知られていない．このため，$\mathcal{N}=8$ 超重力理論は，**極大超重力理論**（maximal supergravity）とよばれる．

2.6　$\mathcal{N}=2$ Poincaré 超重力理論

最も簡単な拡張された超重力理論は，$\mathcal{N}=2$ 超重力理論*10) である．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a(x)$, ベクトル場 $B_\mu(x)$, 2 個の Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi^i_\mu(x)$ $(i=1,2)$ である．ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}^i_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi^i_\rho - \frac{1}{4}\,e\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\,e\,\epsilon^{ij}\,\bar{\psi}^i_\mu\,\gamma^{[\mu}\,\gamma_{\rho\sigma}\,\gamma^{\nu]}\,\psi^j_\nu\,F^{\rho\sigma} + \cdots \tag{2.47}$$

で与えられる．ψ_μ の 4 次の項を，省略して “$\cdots$” で表した．$F_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

*10)　S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1669.

は，ベクトル場の場の強さである．ϵ^{ij} は，i, j について反対称な量で，$\epsilon^{12} = +1 = -\epsilon^{21}$ とする．Rarita–Schwinger 場に対する共変微分 D_ν は，$\mathcal{N} = 1$ の場合の (2.25) と同じく，スピン接続だけを含んでいる．ベクトル場と Rarita–Schwinger 場の結合は，最後の項（**Pauli 項**）による結合だけで，ミニマル結合はしていない．これは，Rarita–Schwinger 場が $U(1)$ チャージをもっていないことを意味している．

このラグランジアンからつくった作用は，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，$U(1)$ ゲージ変換

$$\delta_g\, e_\mu{}^a = 0, \quad \delta_g\, B_\mu = \partial_\mu \zeta, \quad \delta_g\, \psi^i_\mu = 0 \tag{2.48}$$

に対して不変である．また，局所 $\mathcal{N} = 2$ 超変換

$$\begin{aligned} \delta_Q\, e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\, \bar{\epsilon}^i\, \gamma^a\, \psi^i_\mu, \\ \delta_Q\, B_\mu &= \frac{1}{2}\, \epsilon^{ij}\, \bar{\epsilon}^i\, \psi^j_\mu, \\ \delta_Q\, \psi^i_\mu &= D_\mu\, \epsilon^i - \frac{1}{8}\, \epsilon^{ij}\, \gamma^{\rho\sigma}\, \gamma_\mu\, \epsilon^j\, F_{\rho\sigma} + \cdots \end{aligned} \tag{2.49}$$

に対しても不変である．$\delta_Q \psi^i_\mu$ の右辺の ψ_μ について 2 次の項を，省略して "$\cdots$" で表した．超変換は，独立な 2 つの Majorana スピノールの変換パラメータ $\epsilon^i(x)$ $(i = 1, 2)$ を含んでいる．2 つの超変換の交換関係は，

$$[\delta_Q(\epsilon_1),\, \delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_Q(\epsilon) \tag{2.50}$$

となる．交換関係の右辺に現れる変換パラメータは，

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= \frac{1}{4}\, \bar{\epsilon}^i_2\, \gamma^\mu\, \epsilon^i_1, \\ \lambda_{ab} &= -\xi^\mu\, \omega_{\mu ab} + \frac{1}{16}\, \epsilon^{ij}\, \bar{\epsilon}^i_2\, \gamma_{[a}\, \gamma^{\mu\nu}\, \gamma_{b]}\, \epsilon^j_1\, F_{\mu\nu}, \\ \zeta &= \frac{1}{2}\, \epsilon^{ij}\, \bar{\epsilon}^i_2\, \epsilon^j_1 - \xi^\mu\, B_\mu \end{aligned} \tag{2.51}$$

で与えられる．超変換のパラメータ ϵ を求めるためには，上で省略した ψ_μ の高次の項を使う必要があるので，ϵ の具体的な形は省略する．

この理論は，場の方程式が Minkowski 時空解 $e_\mu{}^a = \delta^a_\mu$, $A_\mu = 0$, $\psi_\mu = 0$ をもつので，$\mathcal{N} = 2$ Poincaré 超重力理論とよばれる．この Minkowski 時空解を背景場とした場合，局所変換の交換関係の代数は $\mathcal{N} = 2$ 超 Poincaré 代数になる．局所超変換の交換関係に現れるパラメータ (2.51) のうち，$U(1)$ 変換のパラメータ ζ の第 1 項は，超電荷の反交換関係 (2.44) の中心電荷 U に対応する．

大局的 $U(2)$ 対称性

この理論は，上の局所対称性の他に，大局的 $U(2)$ 対称性をもっている*11)．

*11) S. Ferrara, J. Scherk and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B121** (1977) 393.

これは，$\mathcal{N}=1$ 理論の $U(1)$ 対称性 (2.36) に相当するものである．$U(2) \sim SU(2) \times U(1)$ 対称性のうち，$SU(2)$ 対称性はラグランジアンの不変性であるが，$U(1)$ 対称性は場の方程式の不変性である．

まず，ラグランジアン (2.47) は，実数パラメータ Σ^{ij}, Λ^{ij} をもつ変換

$$\begin{aligned} &\delta e_\mu{}^a = 0, \quad \delta B_\mu = 0, \quad \delta \psi^i_\mu = \left(\Sigma^{ij} + i\,\Lambda^{ij}\,\gamma_5\right)\psi^j_\mu, \\ &\Sigma^{ij} = -\Sigma^{ji}, \quad \Lambda^{ij} = \Lambda^{ji}, \quad \Lambda^{ii} = 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

に対して不変である．パラメータ Σ^{ij} の変換は，$SO(2)$ 変換を表している．これに Λ^{ij} を加えた変換全体は，群 $SU(2)$ をなす．このことは，ψ_μ をカイラリティの固有状態に分解すると見やすい．正カイラリティ成分 $\psi^i_{\mu+} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^i_\mu$ の変換は，

$$\delta\,\psi^i_{\mu+} = \left(\Sigma^{ij} + i\,\Lambda^{ij}\right)\psi^j_{\mu+} \tag{2.53}$$

となる．右辺に現れる 2×2 行列 $\Sigma + i\Lambda$ は，トレースがゼロの反エルミート行列であり，この変換が無限小 $SU(2)$ 変換を表していることがわかる．負カイラリティ成分 $\psi^i_{\mu-} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^i_\mu$ は，$\psi^i_{\mu+}$ の場合の複素共役の形の変換をする．

この理論は，さらに別の大局的 $U(1)$ 対称性をもっている．この $U(1)$ 対称性は，ラグランジアン（または，それからつくった作用）の不変性ではなく，ラグランジアンから導かれる場の方程式の不変性である．ベクトル場 B_μ の場の方程式は，

$$\partial_\mu\left(e\,{*G^{\mu\nu}}\right) = 0, \qquad \partial_\mu\left(e\,{*F^{\mu\nu}}\right) = 0 \tag{2.54}$$

と書ける．$*F^{\mu\nu}$ や $*G^{\mu\nu}$ の $*$ は，2 階の反対称テンソル場に対する Hodge 双対を表し，

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,e^{-1}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma} \tag{2.55}$$

のように定義されている．(2.54) の最初の式の $*G^{\mu\nu}$ は，

$$*G^{\mu\nu} = \frac{2}{e}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = -F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\,\epsilon^{ij}\,\bar{\psi}^{\rho i}\,\gamma_{[\rho}\,\gamma^{\mu\nu}\,\gamma_{\sigma]}\,\psi^{\sigma j} \tag{2.56}$$

を表す．(2.54) の初めの方程式がラグランジアンから導かれた Euler 方程式で，2 番目の方程式は，$F_{\mu\nu}$ がポテンシャル B_μ を使って書けていることを表す Bianchi 恒等式である．これらは，電磁気学の Maxwell 方程式に相当する．(2.54) の 2 つの方程式は同じ形をしているので，$(F_{\mu\nu}, G_{\mu\nu})$ の一般的な線形変換に対して不変である．ただし，$F_{\mu\nu}$ と $G_{\mu\nu}$ は独立ではなく，(2.56) によって関係がついていることに注意する必要がある．このことを考慮すると，(2.54) を不変にする変換は，Λ を実数パラメータとして，

$$\delta\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \delta\,\psi^i_\mu = \frac{1}{2} i\,\Lambda\,\gamma_5\,\psi^i_\mu \tag{2.57}$$

となる．この変換に対しては，$G_{\mu\nu}$ の定義式 (2.56) も不変であり，$F_{\mu\nu}$ と $G_{\mu\nu}$ が独立ではないことと矛盾しない．さらに，${e_\mu}^a$ と ψ_μ^i の場の方程式も変換 (2.57) に対して不変であることが確かめられる．この変換に対する不変性は，大局的 $U(1)$ 対称性を表している．(2.57) の初めの式は，$F_{\mu\nu}$ と $G_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu} + \cdots$ の入れ換えを含む変換を表し，電磁気学における電場と磁場の入れ換えに相当する，(2.57) のような，場の方程式と Bianchi 恒等式を入れ換える変換を含む対称性を，**双対対称性**（duality symmetry）とよぶ．双対対称性は，他の偶数次元の超重力理論でも現れ，弦理論においても重要な役割を果たす．双対対称性については，4.2 節で一般的に議論する．

$\mathcal{N} = 1$ 理論との関係

$\mathcal{N} = 2$ 超重力理論のラグランジアン (2.47) で，

$$\psi_\mu^2 = 0, \qquad B_\mu = 0 \tag{2.58}$$

とおくと，$\mathcal{N} = 1$ 超重力理論のラグランジアン (2.24) が得られる．また，パラメータ ϵ^1 の局所超変換 (2.49) に対して，条件 (2.58) は不変であり，残っている場 ${e_\mu}^a$, ψ_μ^1 の変換は，$\mathcal{N} = 1$ のときの変換 (2.31) になる．このようにして，$\mathcal{N} = 2$ 理論から $\mathcal{N} = 1$ 理論を得ることができる．

一般に，$\mathcal{N}$ 超対称性をもつ超重力理論で，含まれている場のいくつかをゼロとおき，$\mathcal{N}$ よりも小さい $\mathcal{N}'$ 超対称性をもつ超重力理論を得ることができる．このような操作を，**トランケーション**（truncation）という．トランケーションは，場の方程式や超変換と無矛盾である必要がある．もとの理論で，ゼロとおく場の方程式は自動的に満たされなければならない．また，$\mathcal{N}'$ 超対称性の変換に対して，ゼロとおく場の変換は自動的にゼロになっていなければならない．

2.7 $\mathcal{N} = 2$ AdS 超重力理論

$\mathcal{N} = 2$ 超重力理論にも宇宙項を導入することができる[*12)]．ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & e\,R + 6\,m^2\,e - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu^i\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi_\rho^i + \frac{1}{2}\,m\,e\,\bar{\psi}_\mu^i\,\gamma^{\mu\nu}\,\psi_\nu^i \\ & - \frac{1}{4}\,e\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\,e\,\epsilon^{ij}\,\bar{\psi}_\mu^i\,\gamma^{[\mu}\,\gamma_{\rho\sigma}\,\gamma^{\nu]}\,\psi_\nu^j\,F^{\rho\sigma} + \cdots\end{aligned} \tag{2.59}$$

である．$\mathcal{N} = 1$ の場合と同様に，負の宇宙定数をもつ宇宙項と，Rarita–Schwinger 場の質量項が付け加わっている．$\mathcal{N} = 2$ の場合には，さらに Rarita–Schwinger 場に対する共変微分に，

*12) D.Z. Freedman and A. Das, *Nucl. Phys.* **B120** (1977) 221; E.S. Fradkin and M.A. Vasiliev, Lebedev Institute preprint no. 197 (1976).

$$D_{[\mu}\psi^i_{\nu]} = \left(\partial_{[\mu} + \frac{1}{4}\omega_{[\mu}{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi^i_{\nu]} + \frac{1}{2}m\,\epsilon^{ij}B_{[\mu}\psi^j_{\nu]} \tag{2.60}$$

のように，$m=0$ の場合にはなかった，$U(1)$ ゲージ場 B_μ とのミニマル結合の項が含まれている．これは，$m=0$ の場合の大局的対称性 $U(2)$ の中の $SO(2)$ 部分群（(2.52) の Σ^{ij} の変換）をゲージ化したことに相当する．ミニマル結合の結合定数は $g=\frac{1}{2}m$ であり，宇宙項や Rarita–Schwinger 場の質量項と同じパラメータ m に比例している．

このラグランジアンからつくった作用は，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，$U(1)$ ゲージ変換

$$\delta_g e_\mu{}^a = 0, \quad \delta_g B_\mu = \partial_\mu\zeta, \quad \delta_g\psi^i_\mu = -\frac{1}{2}m\,\zeta\,\epsilon^{ij}\psi^j_\mu \tag{2.61}$$

に対して不変である．また，局所超変換

$$\begin{aligned}
\delta_Q e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}^i\gamma^a\psi^i_\mu, \\
\delta_Q B_\mu &= \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\bar{\epsilon}^i\psi^j_\mu, \\
\delta_Q\psi^i &= D_\mu\epsilon^i + \frac{1}{2}m\,\gamma_\mu\epsilon^i - \frac{1}{8}\epsilon^{ij}\gamma^{\rho\sigma}\gamma_\mu\epsilon^j F_{\rho\sigma} + \cdots
\end{aligned} \tag{2.62}$$

に対しても不変である．ϵ^i に対する共変微分は，(2.60) と同じように B_μ のミニマル結合の項を含んでいる．2 つの超変換の交換関係は，(2.50) と同じ形になる．ただし，右辺に現れる局所 Lorentz 変換のパラメータは，(2.51) の λ_{ab} に $-\frac{1}{4}m\bar{\epsilon}_2{}^i\gamma_{ab}\epsilon^i_1$ が加わる．$m=0$ の場合にあった大局的 $U(2)$ 対称性は，その一部の $U(1)$ だけゲージ化されたため，ゲージ場との結合によって破れている．

この理論も，場の方程式が反 de Sitter 時空解をもつため，$\mathcal{N}=2$ **AdS 超重力理論**とよばれる．また，ゲージ場のミニマル結合があることから，**ゲージ化された超重力理論**（gauged supergravity）ともよばれる．

2.8 $\mathcal{N}\geq 3$ 超重力理論

同様に，$\mathcal{N}=3$, 4, 5, 6, 8 の拡張された超重力理論を構成することができる．これらの理論を簡単に見ておこう．

$\mathcal{N}=3$ 超重力理論

$\mathcal{N}=3$ Poincaré 超重力理論は，$\mathcal{N}=2$ 理論とよく似ている．含まれている場は，重力場，3 個の Majorana Rarita–Schwinger 場，3 個のベクトル場，1 個の Majorana スピノール場である．作用は，一般座標変換と局所 Lorentz 変換の他に，ベクトル場の $U(1)^3$（3 個の $U(1)$ の直積）ゲージ変換と $\mathcal{N}=3$ 局所超変換に対して不変である．また，場の方程式は，ベクトル場の双対変換を含む大局的 $U(3)$ 対称性をもっている．

この場合も，宇宙項を含んだ AdS 超重力理論（ゲージ化された超重力理論）を構成できる．ラグランジアンには，(2.59) と同じ形の宇宙項と Rarita–Schwinger 場の質量項が加わる．$\mathcal{N} < 3$ の場合と比べて新しい点は，$m = 0$ のときはアーベル群 $U(1)^3$ のゲージ場だった 3 個のベクトル場が，非アーベル群 $SO(3)$ の Yang–Mills 場になることである．これは，$m = 0$ の場合の大局的対称性 $U(3)$ の部分群 $SO(3)$ をゲージ化したことに相当する．この Yang–Mills 場は，Rarita–Schwinger 場とミニマル結合している．ゲージ結合定数は，$\mathcal{N} = 2$ の場合と同じ $g = \frac{1}{2}m$ である．

$\mathcal{N} \geq 4$ 超重力理論

$\mathcal{N} \geq 4$ Poincaré 超重力理論はスカラー場を含み，そのため $\mathcal{N} \leq 3$ 理論と大きな違いがある．含まれている場は，重力場，$\mathcal{N}$ 個の Majorana Rarita–Schwinger 場，$\frac{1}{2}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)$ 個のベクトル場，それに，いくつかのスピノール場とスカラー場である．スカラー場は，非多項式型の一見複雑な相互作用をしている．たとえば，$\mathcal{N} = 4$ 超重力理論に含まれる複素スカラー場 $\phi(x)$ の運動項は，

$$\mathcal{L} = -e\,\frac{\partial_\mu \phi^* \, \partial^\mu \phi}{(1 - |\phi|^2)^2} \tag{2.63}$$

という形をしている．作用は，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ベクトル場の $U(1)^{\frac{1}{2}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)}$ ゲージ変換，$\mathcal{N}$ 個の局所超変換に対して不変である．

$\mathcal{N} \geq 4$ 理論の大きな特徴は，非コンパクトな Lie 群 G の大局的内部対称性をもつことである．例えば，$\mathcal{N} = 4$ 理論は $G = SU(4) \times SU(1,1)$ 対称性をもっている．これは，$\mathcal{N} \leq 3$ の場合の大局的 $U(\mathcal{N})$ 対称性に相当するものであり，$U(4) = SU(4) \times U(1)$ の中の $U(1)$ が，それを含むより大きな非コンパクト群 $SU(1,1)$ に拡大されている．この G 対称性は，双対対称性を含む運動方程式の対称性である．素粒子の標準理論のような通常の場の理論では，内部対称性はコンパクトな群で表される．しかし，$\mathcal{N} \geq 4$ 超重力理論では，非線形シグマ模型によって記述されるスカラー場が含まれているため，非コンパクト対称性をもつことができる．**非線形シグマ模型**は，群 G をその部分群 H で割った商空間 G/H に値をもつスカラー場の理論である．もともとは，場の理論の自発的対称性の破れで，コンパクトな群 G の対称性がその部分群 H に破れるときに現れる質量ゼロの Nambu–Goldstone ボソンを記述するために導入された理論である．超重力理論では，G が非コンパクトな Lie 群で，H がその極大コンパクト部分群であるような非線形シグマ模型が現れる．このような非コンパクト対称性については，第 4 章で一般的に議論する．また，非コンパクト対称性をもつ超重力理論の例として，$D = 4$, $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論について 4.3 節で述べる．

$\mathcal{N} \geq 4$ の場合も，ベクトル場とのミニマル結合をもつゲージ化された超重力理

論（AdS 超重力理論）を構成することができる．理論に含まれている $\frac{1}{2}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)$ 個のベクトル場は，ゲージ化する前の理論がもっていた大局的な非コンパクト対称性 G の部分群 $SO(\mathcal{N})$ をゲージ群とする Yang–Mills 場になる．（$SO(\mathcal{N})$ ではなく，非コンパクト対称性 G の別の（一般には非コンパクトな）部分群をゲージ化することも可能である.）ラグランジアンは，宇宙項の代わりに，ゲージ結合定数 g の 2 乗に比例したスカラー場のポテンシャル項 $-g^2 eV(\phi)$ を含んでいる．また，フェルミオン場の質量項の代わりに，スカラー場との **Yukawa 結合**（$gef(\phi)\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu$ など）を含んでいる．これらの項は，スカラー場の背景場の値に対して $V(\phi)$ や $f(\phi)$ がゼロでない値をもてば，実質的に宇宙項や質量項の役割を果たし，場の方程式は反 de Sitter 時空を解にもつ．このようなゲージ化された超重力理論については，第 9 章で一般的に議論する．また，例として，ゲージ化された $D=4$, $\mathcal{N}=8$ 超重力理論について 9.2 節で述べる．

第 3 章
超代数と超多重項

この章では，高次元の超重力理論に含まれる場の種類を見つけるために，超代数とそれによって決まる超多重項について述べる．超代数の構造は，それに含まれる超電荷のスピノールの種類に依存しているので，まず，各次元でどのような種類のスピノールが定義できるかについて考える．その結果を使って一般次元の超 Poincaré 代数を求め，その既約表現から超重力理論に現れる超多重項を求める．また，反 de Sitter 時空における超対称性代数についても述べる．

3.1 一般次元のスピノール

3.1.1 ガンマ行列

高次元時空の超重力理論を構成するためには，各次元でどのような種類のスピノールが定義できるかを知る必要がある*1)．D 次元時空のスピノールは，Lorentz 群 $SO(1,D-1)$ のスピノール表現によって変換する量である．ここでは，より一般的な群 $SO(t,s)$ のスピノール表現を考えよう．$SO(t,s)$ は，計量

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}\,(\underbrace{-1,\cdots,-1}_{t},\underbrace{+1,\cdots,+1}_{s}) \qquad (t+s=D) \tag{3.1}$$

を不変に保つ変換の群である（付録 A.3 を参照）．特別な場合として，D 次元の Lorentz 群 $SO(1,D-1)$ と D 次元の回転群 $SO(0,D)=SO(D)$ を含む．超重力理論には，Lorentz 群以外の $SO(t,s)$ も内部対称性として現れる．

$SO(t,s)$ のガンマ行列 γ^a $(a=1,2,\cdots,D)$*2) は，$\mathbf{1}$ を単位行列として，反交換関係

$$\{\gamma^a,\,\gamma^b\} = 2\,\eta^{ab}\,\mathbf{1} \tag{3.2}$$

*1) 参考文献 [9]; T. Kugo and P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357.
*2) Lorentz 群 $SO(1,D-1)$ の場合は，$a=0,1,2,\cdots,D-1$ とする．

を満たす D 個の行列である．行列 γ^a は，$a=1,\cdots,t$ のとき反エルミートで，$a=t+1,\cdots,D$ のときエルミートである．この反交換関係を満たす最小の行列は，$[x]$ を x を超えない最大の整数として，$2^{[D/2]}\times 2^{[D/2]}$ 行列である．ガンマ行列の具体的な表示は，2×2 行列のテンソル積として表すことができる．$SO(2n)$ の場合は，n 個の 2×2 行列のテンソル積として

$$
\begin{aligned}
\gamma^1 &= \sigma_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
\gamma^2 &= \sigma_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
\gamma^3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
\gamma^4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
&\ \ \vdots \\
\gamma^{2k+1} &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{k} \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
\gamma^{2k+2} &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{k} \otimes \sigma_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
&\ \ \vdots \\
\gamma^{2n-1} &= \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1, \\
\gamma^{2n} &= \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

と表すことができる．ここで，$\mathbf{1}$ は 2×2 単位行列，σ_i $(i=1,2,3)$ は Pauli 行列 (2.5) である．$SO(t,s)$ $(t+s=2n)$ のガンマ行列は，$SO(2n)$ のガンマ行列の最初の t 個に虚数単位 i を掛ければ得られる．$SO(t,s)$ $(t+s=2n+1)$ のガンマ行列は，$SO(t,s-1)$ のガンマ行列を使って，次のように構成できる．まず，初めの $2n$ 個のガンマ行列として $SO(t,s-1)$ のガンマ行列 γ^a $(a=1,\cdots,2n)$ を使う．最後の行列 γ^{2n+1} として，

$$
\gamma^{2n+1} = (-1)^{\frac{1}{4}(s-t-1)}\,\gamma^1\,\gamma^2\cdots\gamma^{2n}
\tag{3.4}
$$

を使う．これらの $2n+1$ 個の行列は，$SO(t,s)$ ガンマ行列の反交換関係を満たす．

ガンマ行列に関する公式を付録 B にまとめた．また，次の定理が成り立つ．

Pauli の基本定理[*3)]

D が偶数の場合，2 組の D 個の $2^{[D/2]}\times 2^{[D/2]}$ 行列 $\{\gamma^a\}$ と $\{\gamma'^a\}$ が，それぞれ，反交換関係 (3.2) を満たすとき，ある行列 S が存在し，

$$
\gamma'^a = S\,\gamma^a\,S^{-1}
\tag{3.5}
$$

---

*3) $D=4$ の場合の証明は，J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics" (Addison–Wesley, 1967) の付録 C を参照せよ．この証明は，D が任意の偶数の場合に容易に一般化できる．

が成り立つ．また，S は定数倍を除いて一意的である．

3.1.2 Dirac スピノール

$SO(t,s)$ の一般的なスピノール ψ は，$2^{[D/2]}$ 個の複素成分をもっており，無限小 $SO(t,s)$ 変換の下で，

$$\delta_L\,\psi = -\frac{1}{4}\,\lambda^{ab}\,\gamma_{ab}\,\psi \qquad (\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}) \tag{3.6}$$

のように変換する．ここで，$\gamma^{ab} = \gamma^{[a}\gamma^{b]}$ は 2 つのガンマ行列の反対称積である．行列 A を

$$A = (-1)^{\frac{1}{4}t(t+1)}\,\gamma^1\,\gamma^2\cdots\gamma^t \tag{3.7}$$

と定義すると，

$$(\gamma^a)^\dagger = (-1)^t\,A\,\gamma^a\,A^{-1}, \quad A^\dagger = A, \quad A^2 = \mathbf{1} \tag{3.8}$$

が成り立つ．この行列を使って，スピノール ψ の **Dirac 共役**

$$\bar\psi = \psi^\dagger\,A \tag{3.9}$$

を定義する．$SO(1,D-1)$ の場合は，1.4 節で定義したように，$\bar\psi = \psi^\dagger i\gamma^0$ となる．Dirac 共役は，$SO(t,s)$ 変換に対して，

$$\delta_L\,\bar\psi = \frac{1}{4}\,\lambda_{ab}\,\bar\psi\,\gamma^{ab} \tag{3.10}$$

と変換する．4 次元時空のスピノールと同様に，$\bar\psi$ と ψ から双 1 次形式

$$\bar\psi\,\psi, \quad \bar\psi\,\gamma^a\,\psi, \quad \bar\psi\,\gamma^{ab}\,\psi, \quad \cdots \tag{3.11}$$

をつくると，これらは $SO(t,s)$ 変換に対してテンソルとして変換する．

以下で議論するように，スピノールに対して適当な条件を課すことによって，独立な成分の個数を減らすことができる場合がある．そのような条件のついていない一般的なスピノールは，**Dirac スピノール**とよばれる．超対称性を議論する際には，各次元で最も少ない独立な成分をもったスピノールを使うと便利である．

3.1.3 Weyl スピノール

Weyl スピノールは，決まったカイラリティをもつスピノールであり，D が偶数のときだけ定義できる．スピノールのカイラリティは，**カイラリティ行列**

$$\bar\gamma = (-1)^{\frac{1}{4}(s-t)}\,\gamma_1\,\gamma_2\cdots\gamma_D \tag{3.12}$$

の固有値として定義される．この行列は，

$$\bar{\gamma}^2 = 1, \quad \{\bar{\gamma}, \gamma^a\} = 0, \quad \bar{\gamma}^\dagger = \bar{\gamma} \tag{3.13}$$

を満たし，その固有値は ± 1 である．行列 $\bar{\gamma}$ は，4 次元の Lorentz 群 $SO(1,3)$ の $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ を一般化したものである．正のカイラリティをもつ Weyl スピノール ψ_+ と負のカイラリティをもつ Weyl スピノール ψ_- は，**Weyl 条件**

$$\bar{\gamma}\,\psi_+ = \psi_+, \qquad \bar{\gamma}\,\psi_- = -\psi_- \tag{3.14}$$

を満たすスピノールとして定義される．これらの条件が $SO(t,s)$ 変換 (3.6) と矛盾しないことは，$\bar{\gamma}$ と γ^{ab} が交換することからわかる．Dirac 共役は，

$$\bar{\psi}_+\,\bar{\gamma} = (-1)^t\,\bar{\psi}_+, \qquad \bar{\psi}_-\,\bar{\gamma} = -(-1)^t\,\bar{\psi}_- \tag{3.15}$$

を満たす．行列 $\bar{\gamma}$ と Weyl スピノールは，任意の偶数次元で定義することができる．奇数次元では，(3.4) から

$$\gamma_1\,\gamma_2 \cdots \gamma_D = (-1)^{-\frac{1}{4}(s+3t-1)}\,\mathbf{1} \tag{3.16}$$

となり，(3.12) の $\bar{\gamma}$ が単位行列に比例するので，Weyl スピノールを定義することはできない．

3.1.4 Majorana スピノール

Majorana スピノールは，Majorana 条件というある種の実数性条件を満たすスピノールである．スピノール ψ の**荷電共役**を ψ^c で表すと，**Majorana 条件**は，

$$\psi^c = \psi \tag{3.17}$$

と書ける．荷電共役の定義について，$D = t + s$ が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えよう．

まず，D が偶数の場合を考える．行列 $\pm(\gamma^a)^*$ は γ^a と同じ反交換関係を満たすので，Pauli の基本定理から，ある行列 B_+, B_- が存在して，

$$(\gamma^a)^* = B_+\,\gamma^a\,B_+^{-1}, \qquad -(\gamma^a)^* = B_-\,\gamma^a\,B_-^{-1} \tag{3.18}$$

が成り立つ．荷電共役は，これらの行列のうちどちらかを使って，

$$\psi^c = B_+^{-1}\,\psi^* \qquad \text{または} \qquad \psi^c = B_-^{-1}\,\psi^* \tag{3.19}$$

と定義される．どちらの場合も，(3.18) を使うと，ψ^c の $SO(t,s)$ 変換が (3.6) と同じ形になることが確かめられる．$B_\pm$ は，

$$B_\pm^\dagger\,B_\pm = \mathbf{1}, \quad B_\pm^*\,B_\pm = \epsilon_\pm\,\mathbf{1}, \quad B_\pm^T = \epsilon_\pm\,B_\pm \tag{3.20}$$

を満たす．$\epsilon_\pm$ は，$+1$ または -1 の値をとる定数で

表 3.1　$\epsilon_\pm$ の値.

[redacted]								
[redacted]	+1	+1	No	−1	−1	−1	No	+1
[redacted]	No	−1	−1	−1	No	+1	+1	+1

$$\epsilon_\pm = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{4}(s-t\mp 1)\right] \tag{3.21}$$

で与えられる[*4)]. $\epsilon_\pm$ の値を，表 3.1 にまとめた.

荷電共役の定義 (3.19) は，荷電共役行列 C を使って書き直すこともできる. **荷電共役行列** $C_\pm$ を，(3.7) の A を使って，

$$C_\pm = B_\pm^{-1}\,A^{-1T} \tag{3.22}$$

と定義すると，(3.19) は，

$$\psi^c = C_+\,\bar{\psi}^T \qquad \text{または} \qquad \psi^c = C_-\,\bar{\psi}^T \tag{3.23}$$

と書ける. $\bar{\psi}$ は，(3.9) によって定義される Dirac 共役である. (3.7), (3.8), (3.18), (3.20) を使うと，荷電共役行列 $C_\pm$ が,

$$\begin{aligned}&\gamma^{aT} = \pm(-1)^t\,C_\pm^{-1}\,\gamma^a\,C_\pm,\\ &C_\pm^T = (\pm 1)^t\,(-1)^{\frac{1}{2}t(t+1)}\,\epsilon_\pm\,C_\pm, \qquad C_\pm^\dagger\,C_\pm = \mathbf{1}\end{aligned} \tag{3.24}$$

を満たすことがわかる. 第 2 章で使った 4 次元の荷電共役行列 C は C_+ である.

Majorana 条件 (3.17) が無矛盾であるためには，$(\psi^c)^c = \psi$ が成り立たなければならない. これは，$B_+^* B_+ = \mathbf{1}$ または $B_-^* B_- = \mathbf{1}$ と同値である. したがって，$\epsilon_+ = +1$ または $\epsilon_- = +1$ のときだけ Majorana スピノールが定義できる. Majorana スピノールを定義する際に，B_+ と B_- のどちらを使ったかを区別するときは，B_+ を使った場合を **Majorana スピノール**，B_- を使った場合を**擬 Majorana スピノール**とよぶ. 表 3.1 から，どの t, s に対して（擬）Majorana スピノールが定義できるかがわかる.

$D = t + s$ が奇数の場合の荷電共役は，1 次元低い $SO(t, s-1)$ の行列 $B_\pm$ を使って定義される. この場合，$SO(t,s)$ のガンマ行列が $SO(t, s-1)$ のガンマ行列を使って構成できることを思い出そう. $SO(t,s)$ の初めの $D-1$ 個の行列として $SO(t, s-1)$ の $\gamma^1, \gamma^2, \cdots, \gamma^{D-1}$ を使い，最後の行列 γ^D として (3.4) を使うことができる. すると，$SO(t, s-1)$ の $B_\pm$ は,

$$\begin{aligned}&B_\pm\,\gamma^a\,B_\pm^{-1} = \pm(\gamma^a)^* \qquad (a = 1, \cdots, D-1),\\ &B_\pm\,\gamma^D\,B_\pm^{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(s-t-1)}\,(\gamma^D)^*\end{aligned} \tag{3.25}$$

を満たす. したがって，$(-1)^{\frac{1}{2}(s-t-1)} = +1$ のときは，B_+ を使えば，(3.25)

---

*4)　(3.20), (3.21) の証明は，脚注 *1) の論文を参照せよ.

表 3.2　Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ の可能なスピノール．D, W, M, pM, MW, pMW は，それぞれ，Dirac, Weyl, Majorana, 擬 Majorana, Majorana–Weyl, 擬 Majorana–Weyl スピノールを表す．

[redacted]						
11	○		○			
10	○	○	○	○	○	○
9	○			○		
8	○	○		○		
7	○					
6	○	○				
5	○					
4	○	○	○			

の右辺の符号がすべてのガンマ行列に対して同じ + になり，B_+ を荷電共役の定義に使うことができる．同様に，$(-1)^{\frac{1}{2}(s-t-1)} = -1$ のときは，B_- を荷電共役の定義に使うことができる．このように，D が奇数の場合は，B_+ と B_- のどちらか 1 つだけを荷電共役の定義に使うことができる．可能な $B_\pm$ と $\epsilon_\pm$ を表 3.1 に示した．D が偶数の場合と同様に，Majorana スピノールを定義するためには，$\epsilon_+ = +1$ または $\epsilon_- = +1$ でなければならない．

3.1.5　Majorana–Weyl スピノール

（擬）**Majorana–Weyl** スピノールは，（擬）Majorana 条件 $\psi^c = \psi$ と Weyl 条件 $\bar{\gamma}\psi = \psi$ (または $\bar{\gamma}\psi = -\psi$) の両方を満たすスピノールである．この 2 つの条件が無矛盾であるためには，ψ と ψ^c が同じカイラリティをもつことが必要である．一般に，スピノール ψ のカイラリティとその荷電共役 ψ^c のカイラリティの関係は，

$$\bar{\gamma}\,\psi = \pm\psi \quad \longleftrightarrow \quad \bar{\gamma}\,\psi^c = \pm(-1)^{\frac{1}{2}(s-t)}\,\psi^c \tag{3.26}$$

となる．したがって，ψ と ψ^c は，$s-t = 0 \bmod 4$ のときだけ同じカイラリティをもつ．ただし，表 3.1 の $\epsilon_\pm$ の符号からわかるように，$s-t = 4 \bmod 8$ のときは Majorana スピノールが定義できない．結局，（擬）Majorana–Weyl スピノールが定義できるのは，$s-t = 0 \bmod 8$ のときだけである．特に，Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ の場合は，$D = 2 \bmod 8$ のときだけ（擬）Majorana–Weyl スピノールが定義できる．

Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ の場合に，可能なスピノールの種類を表 3.2 にまとめた．この表は，次元 D について周期 8 の周期性をもっている．

3.1.6　シンプレクティック Majorana スピノール

$(\psi^c)^c = \psi$ を満たす荷電共役が定義できない場合（$s-t = 3,\ 4,\ 5 \bmod 8$ の

場合）は，（擬）Majorana 条件 $\psi^c = \psi$ を課すことはできず，Dirac スピノール（または，D が偶数の場合は Weyl スピノール）を使うことになる．この場合，Dirac スピノールを使う代わりに，偶数個のスピノール ψ^i $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$ を導入して，**シンプレクティック Majorana 条件**

$$\psi^i = \Omega^{ij}\,(\psi^j)^c \tag{3.27}$$

を矛盾なく課すことも可能である．ここで，$\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}$ は，$\Omega^{ik}(\Omega^{kj})^* = -\delta^i_j$ を満たす反対称な定数行列である．このような条件を満たすスピノールを，**シンプレクティック（擬）Majorana スピノール**とよぶ．また，$s - t = 4 \mod 8$ の場合には，シンプレクティック Majorana 条件 (3.27) と Weyl 条件 (3.14) を同時に満たす**シンプレクティック（擬）Majorana–Weyl スピノール**を定義することもできる．$2n$ 個のシンプレクティック（擬）Majorana スピノールは，n 個の Dirac スピノールと等価である．理論がシンプレクティック群の対称性を持っている場合など，Dirac スピノールよりもシンプレクティック（擬）Majorana スピノールを使うほうが便利な場合がある．

3.2 超 Poincaré 代数

第 2 章で述べたように，Minkowski 時空における大局的超対称性をもつ場の理論では，含まれる場は超 Poincaré 代数の超多重項をつくっている．超重力理論の場合も，Minkowski 時空が場の方程式の解になっているならば，そのまわりの場のゆらぎは超 Poincaré 代数の超多重項をつくる．ここでは，一般の次元における超 Poincaré 代数とその超多重項について考えよう[*5)]．

超 Poincaré 代数は，並進の生成子 P_a, Lorentz 変換の生成子 M_{ab}，**超電荷** Q^i, **中心電荷** Z^{ij} からなる．生成子の（反）交換関係は，

$$\begin{aligned}
&[M_{ab},\, M_{cd}] = -i\,\eta_{bc}\,M_{ad} + i\,\eta_{bd}\,M_{ac} + i\,\eta_{ac}\,M_{bd} - i\,\eta_{ad}\,M_{bc},\\
&[M_{ab},\, P_c] = -i\,\eta_{bc}\,P_a + i\,\eta_{ac}\,P_b,\\
&[P_a,\, P_b] = 0,\\
&[M_{ab},\, Q^i] = \frac{1}{2} i\,\gamma_{ab}\,Q^i,\\
&[P_a,\, Q^i] = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

および，下で述べる超電荷の反交換関係 $\{Q, Q\}$ である．初めの 3 つは D 次元の Poincaré 代数の交換関係である．中心電荷 Z^{ij} は，すべての生成子と交換する．さらに，超 Poincaré 代数のこれらの（反）交換関係を不変に保つ変換があり，それをこの代数の**自己同型**（automorphism）とよぶ．また，自己同型のつくる群 K を**自己同型群**（automorphism group）とよぶ．K の生成子 T_I

*5) J. Strathdee, *Int. J. Mod. Phys.* **A2** (1987) 273.

$(I=1,\ 2,\ \cdots,\ \dim K)$ を含む交換関係は,

$$
\begin{aligned}
&[T_I,\, Q^i] = -(t_I)^i{}_j\, Q^j, \\
&[T_I,\, Z^{ij}] = -(t_I)^i{}_k\, Z^{kj} - (t_I)^j{}_k\, Z^{ik}, \\
&[T_I,\, T_J] = i\, f_{IJ}{}^K\, T_K
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

である．$f_{IJ}{}^K$ と t_I は，K の Lie 代数の構造定数と表現行列である．

自己同型群 K と反交換関係 $\{Q, Q\}$ の形は，超電荷 Q^i のスピノールの種類によって異なるので，各次元ごとにみていこう．

(a) $D = 4,\ 8 \bmod 8$ の場合

この場合は（擬）Majorana スピノールが定義できるが，超電荷の反交換関係を書くには，Weyl スピノールを使ったほうが便利である．これらの次元では,（擬）Majorana スピノールと Weyl スピノールは等価である.（実際,（擬）Majorana スピノールがあれば，それをカイラル射影すれば Weyl スピノールが得られる．逆に，負カイラリティの Weyl スピノール ψ_- があれば，(3.26) からその荷電共役 $(\psi_-)^c$ は正カイラリティをもち，$\psi = \psi_- + (\psi_-)^c$ は（擬）Majorana スピノールになる.）超電荷を負のカイラリティをもつ Weyl スピノール Q^i_- $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N})$ にとる．その荷電共役 $(Q^i_-)^c = Q_{+i}$ は，正のカイラリティをもつ．荷電共役の定義には，$D = 4 \bmod 8$ のときは $C = C_+$ を，$D = 8 \bmod 8$ のときは $C = C_-$ を使う．超電荷の反交換関係は,

$$
\begin{aligned}
&\{Q^i_-,\, Q^T_{+j}\} = -2i \cdot \frac{1}{2}\,(1-\bar{\gamma})\,\gamma^a\, C^T\, P_a\, \delta^i_j, \\
&\{Q^i_-,\, Q^{jT}_-\} = \frac{1}{2}\,(1-\bar{\gamma})\, C^T\, Z^{ij}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

となる．荷電共役行列の（反）対称性から，$D = 4 \bmod 8$ のときは $Z^{ij} = -Z^{ji}$, $D = 8 \bmod 8$ のときは $Z^{ij} = Z^{ji}$ である．自己同型群は，$K = U(\mathcal{N}) = SU(\mathcal{N}) \times U(1)$ である．$SU(\mathcal{N})$ に対して，Q^i_- と Q_{+i} は，それぞれ，基本表現 $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ と $\bar{\boldsymbol{\mathcal{N}}}$ によって変換する．また，$U(1)$ チャージは，それぞれ，$+1$ と -1 である．$D = 4$ の場合の反交換関係 (2.44) は，カイラリティの固有状態に分ければ，$Z^{ij} = U^{ij} - iV^{ij}$ として，上の形になる．

(b) $D = 10 \bmod 8$ の場合

この場合は Majorana–Weyl スピノールが定義でき，超電荷を正カイラリティの Majorana–Weyl スピノール Q^i_+ $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N}_+)$ と負カイラリティの Majorana-Weyl スピノール Q^i_- $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N}_-)$ にとる．これらは独立なスピノールである．荷電共役の定義には，$C = C_+$ と $C = C_-$ のどちらを使うこともできる．超電荷の反交換関係は,

$$\{Q^i_+,\, Q^{jT}_+\} = -2i\cdot\frac{1}{2}\,(1+\bar{\gamma})\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\delta^{ij},$$
$$\{Q^i_-,\, Q^{jT}_-\} = -2i\cdot\frac{1}{2}\,(1-\bar{\gamma})\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\delta^{ij}, \qquad (3.31)$$
$$\{Q^i_+,\, Q^{jT}_-\} = \frac{1}{2}\,(1+\bar{\gamma})\,C^T\,Z^{ij}$$

となる．自己同型群は，$K = SO(\mathcal{N}_+)\times SO(\mathcal{N}_-)$ であり，Q^i_+ と Q^i_- は，それぞれ，表現 $(\boldsymbol{\mathcal{N}}_+, \mathbf{0})$ と $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{N}}_-)$ によって変換する．

(c) $D = 6$ mod 8 の場合

この場合はシンプレクティック Majorana–Weyl スピノールが定義でき，超電荷を正カイラリティのシンプレクティック Majorana–Weyl スピノール Q^i_+ $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N}_+)$ と負カイラリティのシンプレクティック Majorana–Weyl スピノール Q^i_- $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N}_-)$ にとる．これらは，$\Omega^{ij}_+(Q^j_+)^c = Q^i_+$, $\Omega^{ij}_-(Q^j_-)^c = Q^i_-$ を満たす．$\Omega^{ij}_\pm$ は反対称行列であり，$\mathcal{N}_+$ と $\mathcal{N}_-$ は偶数でなければならない．Q^i_+ と Q^i_- は独立なスピノールである．荷電共役の定義には，$C = C_+$ と $C = C_-$ のどちらを使うこともできる．超電荷の反交換関係は，

$$\{Q^i_+,\, Q^{jT}_+\} = -2i\cdot\frac{1}{2}\,(1+\bar{\gamma})\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\Omega^{ij}_+,$$
$$\{Q^i_-,\, Q^{jT}_-\} = -2i\cdot\frac{1}{2}\,(1-\bar{\gamma})\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\Omega^{ij}_-, \qquad (3.32)$$
$$\{Q^i_+,\, Q^{jT}_-\} = \frac{1}{2}\,(1+\bar{\gamma})\,C^T\,Z^{ij}$$

である．自己同型群は，$K = USp(\mathcal{N}_+)\times USp(\mathcal{N}_-)$ であり，Q^i_+ と Q^i_- は，それぞれ，表現 $(\boldsymbol{\mathcal{N}}_+, \mathbf{0})$ と $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{N}}_-)$ によって変換する．

(d) $D = 9$，11 mod 8 の場合

この場合は（擬）Majorana スピノールが定義でき，超電荷を（擬）Majorana スピノール Q^i $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N})$ にとる．超電荷の反交換関係は，

$$\{Q^i,\, Q^{jT}\} = -2\,i\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\delta^{ij} + C^T\,Z^{ij}, \qquad (3.33)$$

となる．ここで，$D = 9$ mod 8 のとき $C = C_-$, $Z^{ij} = Z^{ji}$ であり，$D = 11$ mod 8 のとき $C = C_+$, $Z^{ij} = -Z^{ji}$ である．自己同型群は $K = SO(\mathcal{N})$ であり，Q^i は表現 $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ によって変換する．

(e) $D = 5$，7 mod 8

この場合はシンプレクティック Majorana スピノールが定義でき，超電荷をシンプレクティック Majorana スピノール Q^i $(i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N})$ にとる．これは，$\Omega^{ij}(Q^j)^c = Q^i$ を満たす．Ω^{ij} は反対称な行列であり，$\mathcal{N}$ は偶数でなければならない．超電荷の反交換関係は，

$$\{Q^i,\, Q^{jT}\} = -2\,i\,\gamma^a\,C^T\,P_a\,\Omega^{ij} + C^T\,Z^{ij}, \qquad (3.34)$$

である．ここで，$D=5 \bmod 8$ のとき $C=C_-$, $Z^{ij}=-Z^{ji}$ であり，$D=7 \bmod 8$ のとき $C=C_+$, $Z^{ij}=Z^{ji}$ である．自己同型群は，$K=USp(\mathcal{N})$ であり，Q^i は表現 $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ によって変換する．

ここではスカラーの中心電荷 Z^{ij} だけを考えたが，より一般には，反対称テンソルの「中心電荷」を考えることもできる*6)．(これは，Lorentz 変換の生成子とは交換しないので，本当の意味の中心電荷ではない.）そのような中心電荷については，第 5 章で高次元の超重力理論の局所超変換の交換関係を議論するときにふれる．

3.3 超多重項

超重力理論が Minkowski 時空を場の方程式の解としてもつ場合，その解のまわりの場のゆらぎを量子化したときに現れる粒子は，超 Poincaré 代数の既約表現によって変換する**超多重項**（supermultiplet）をつくる．第 2 章で 4 次元の場合にみたように，1 つの超多重項のすべての状態は，最低のヘリシティ状態 $|h_{\min}\rangle$ にヘリシティ $\frac{1}{2}$ をもった超電荷の成分 $Q_{\frac{1}{2}}$ を作用させることにより得られる．n 個の $Q_{\frac{1}{2}}$ を作用させた状態 $Q_{\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}}\cdots Q_{\frac{1}{2}}|h_{\min}\rangle$ は，ヘリシティ $h=h_{\min}+\frac{1}{2}n$ をもつ．超電荷が多くの成分をもつ場合は，すべての超多重項が大きなヘリシティをもつ粒子を含む．しかし，相互作用したヘリシティが 2 より大きい粒子を含む矛盾のない場の理論は知られていないので，ヘリシティが 2 以下の粒子だけを含む理論を考えよう．すると，表 3.3 に上げた $(D, \mathcal{N})$ の理論だけが許される．特に，時空の次元は 11 次元以下でなければならないことがわかる．これらの $(D, \mathcal{N})$ に対する超多重項は，脚注 *5) の論文に与えられている．各次元で最大の超対称性をもつ理論を，**極大超重力理論**（maximal supergravity）という．

グラビトン（graviton）とグラビティーノ（gravitino）を含む超多重項を**超重力多重項**とよぶ．これは，

$$P_a P^a = 0, \qquad Z^{ij} = 0. \tag{3.35}$$

を満たすゼロ質量表現に属する超多重項の 1 つである．各 $(D, \mathcal{N})$ に対する超重力多重項を，粒子に対応する場の形で，表 3.3 にまとめた．超重力多重項は，一般的には，重力場と Rarita–Schwinger 場の他に，いろいろな階数の反対称テンソル場，ベクトル場，スカラー場，スピノール場を含んでいる．反対称テンソル場 $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$ は，1.6.1 節で述べたように，それに双対な場 $\tilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_{D-n-2}}$ で置き換えることができる場合がある．10 次元以下では，超重力多重項以外に，グラビトンとグラビティーノを含まない**物質多重項**も存在する．ゼロ質量の物

*6) J.W. van Holten and A. van Proeyen, *J. Phys.* **A15** (1982) 3763.

表 3.3 超重力多重項．$e_\mu{}^a$, ψ_μ, $B_{\mu_1\cdots\mu_n}$, λ, ϕ は，それぞれ，多脚場，Rarita–Schwinger 場，反対称テンソル場，スピノール場，スカラー場を表す．フェルミオン場の下付き添字 ± は，カイラリティを表す．反対称テンソル場の上付き添字 (±) は，（反）自己双対性条件を満たすことを表す．場の個数は，ボソン場に対しては実数場で，フェルミオン場に対しては（シンプレクティック／擬）Majorana(–Weyl) スピノールで数えている．最後の列 n は，ボソン的自由度（=フェルミオン的自由度）を表している．

[redacted]				
11	1	M	$e_\mu{}^a$, ψ_μ, $B_{\mu\nu\rho}$	128
10	(1,1)	MW	$e_\mu{}^a$, $\psi_{\mu+}$, $\psi_{\mu-}$, $B_{\mu\nu\rho}$, $B_{\mu\nu}$, B_μ, λ_+, λ_-, ϕ	128
	(2,0)	MW	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_{\mu+}$, $B^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $2\,B_{\mu\nu}$, $2\,\lambda_-$, $2\,\phi$	128
	(1,0)	MW	$e_\mu{}^a$, $\psi_{\mu+}$, $B_{\mu\nu}$, λ_-, ϕ	64
9	2	pM	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_\mu$, $B_{\mu\nu\rho}$, $2\,B_{\mu\nu}$, $3\,B_\mu$, $4\,\lambda$, $3\,\phi$	128
	1	pM	$e_\mu{}^a$, ψ_μ, $B_{\mu\nu}$, B_μ, λ, ϕ	56
8	2	pM	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_\mu$, $B_{\mu\nu\rho}$, $3\,B_{\mu\nu}$, $6\,B_\mu$, $6\,\lambda$, $7\,\phi$	128
	1	pM	$e_\mu{}^a$, ψ_μ, $B_{\mu\nu}$, $2\,B_\mu$, λ, ϕ	48
7	4	sM	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_\mu$, $5\,B_{\mu\nu}$, $10\,B_\mu$, $16\,\lambda$, $14\,\phi$	128
	2	sM	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_\mu$, $B_{\mu\nu}$, $3\,B_\mu$, $2\,\lambda$, ϕ	40
6	(4,4)	sMW	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_{\mu+}$, $4\,\psi_{\mu-}$, $5\,B_{\mu\nu}$, $16\,B_\mu$, $20\,\lambda_+$, $20\,\lambda_-$, $25\,\phi$	128
	(4,2)	sMW	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_{\mu+}$, $2\,\psi_{\mu-}$, $5\,B^{(+)}_{\mu\nu}$, $B^{(-)}_{\mu\nu}$, $8\,B_\mu$, $10\,\lambda_+$, $4\,\lambda_-$, $5\,\phi$	64
	(2,2)	sMW	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_{\mu+}$, $2\,\psi_{\mu-}$, $B_{\mu\nu}$, $4\,B_\mu$, $2\,\lambda_+$, $2\,\lambda_-$, ϕ	32
	(4,0)	sMW	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_{\mu+}$, $5\,B^{(+)}_{\mu\nu}$	24
	(2,0)	sMW	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_{\mu+}$, $B^{(+)}_{\mu\nu}$	12
5	8	spM	$e_\mu{}^a$, $8\,\psi_\mu$, $27\,B_\mu$, $48\,\lambda$, $42\,\phi$	128
	6	spM	$e_\mu{}^a$, $6\,\psi_\mu$, $15\,B_\mu$, $20\,\lambda$, $14\,\phi$	64
	4	spM	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_\mu$, $6\,B_\mu$, $4\,\lambda$, ϕ	24
	2	spM	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_\mu$, B_μ	8
4	8	M	$e_\mu{}^a$, $8\,\psi_\mu$, $28\,B_\mu$, $56\,\lambda$, $70\,\phi$	128
	6	M	$e_\mu{}^a$, $6\,\psi_\mu$, $16\,B_\mu$, $26\,\lambda$, $30\,\phi$	64
	5	M	$e_\mu{}^a$, $5\,\psi_\mu$, $10\,B_\mu$, $11\,\lambda$, $10\,\phi$	32
	4	M	$e_\mu{}^a$, $4\,\psi_\mu$, $6\,B_\mu$, $4\,\lambda$, $2\,\phi$	16
	3	M	$e_\mu{}^a$, $3\,\psi_\mu$, $3\,B_\mu$, λ	8
	2	M	$e_\mu{}^a$, $2\,\psi_\mu$, B_μ	4
	1	M	$e_\mu{}^a$, ψ_μ	2

質多重項を表 3.4 にまとめた．

表 3.3 と表 3.4 の各超多重項について，ボソンの自由度とフェルミオンの自由度を数えてみよう．超対称性の既約表現に属しているならば，それらは等しいはずである．それぞれの場の物理的自由度は，**光円錐ゲージ**[*7] を選ぶと簡単に数えることができる．光円錐ゲージでは，横波成分だけが物理的自由度を表

*7) たとえば，参考文献 [18] の第 10 章を参照せよ．

表 3.4 ゼロ質量物質多重項．A_μ, $B^{(-)}_{\mu\nu}$, χ, ψ, ϕ は，それぞれ，ベクトル場，反自己双対な反対称テンソル場，スピノール場，スピノール場，スカラー場を表す．

[redacted]				
10	(1,0)	MW	A_μ, χ_+	8
9	1	pM	A_μ, χ, ϕ	8
8	1	pM	A_μ, χ, $2\,\phi$	8
7	2	sM	A_μ, $2\,\chi$, $3\,\phi$	8
6	(2,2)	sMW	A_μ, $2\,\chi_+$, $2\,\chi_-$, $4\,\phi$	8
	(4,0)	sMW	$B^{(-)}_{\mu\nu}$, $4\,\psi_-$, $5\,\phi$	8
	(2,0)	sMW	$B^{(-)}_{\mu\nu}$, $2\,\psi_-$, ϕ	4
		sMW	A_μ, $2\,\chi_+$	4
		sMW	$2\,\psi_-$, $4\,\phi$	4
5	4	spM	A_μ, $4\,\chi$, $5\,\phi$	8
	2	spM	A_μ, $2\,\chi$, ϕ	4
		spM	$2\,\psi$, $4\,\phi$	4
4	4	M	A_μ, $4\,\chi$, $6\,\phi$	8
	2	M	A_μ, $2\,\chi$, $2\,\phi$	4
		M	$2\,\psi$, $4\,\phi$	4
	1	M	A_μ, χ	2
		M	ψ, $2\,\phi$	2

す．それぞれの場の自由度は，

$$
\begin{aligned}
&e_\mu{}^a \;:\; \tfrac{1}{2}(D-2)(D-1)-1,\\
&B_{\mu_1\cdots\mu_n} \;:\; {}_{D-2}\mathrm{C}_n,\\
&\phi \;:\; 1,\\
&\psi_\mu \;:\; \tfrac{1}{2}(D-2-1)\cdot 2^{[D/2]},\\
&\lambda \;:\; \tfrac{1}{2}\cdot 2^{[D/2]}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

となる．$e_\mu{}^a$ と ψ_μ の式の -1 は，(γ-) トレースレス条件による．スピノール場の $\frac{1}{2}$ は，場の方程式が 1 階の微分方程式であることによる．下付き添字 $\pm$ のついた Weyl スピノール場や上付き添字 $(\pm)$ のついた（反）自己双対な反対称テンソル場の自由度は，(3.36) に与えた数の半分である．それぞれの超多重項で，ボソンとフェルミオンの自由度は等しいことが確かめられる．この自由度 n を表 3.3 と表 3.4 の最後の列に書いた．極大超重力理論は，すべて同じ自由度 128 をもっている．

3.4 M 理論と超弦理論

Minkowski 時空上の M 理論や超弦理論の表す粒子状態は，超 Poincaré 代数

の超多重項をつくっている．特に，ゼロ質量状態は，超重力多重項や超 Yang–Mills 多重項をつくり，その低エネルギー有効理論は超重力理論を使って表すことができる．

超弦理論の定式化には，**Neveu–Schwarz–Ramond 形式**（NSR 形式）と **Green–Schwarz 形式**（GS 形式）の 2 種類がある．NSR 形式では，Lorentz 共変な量子化が容易である．開弦の物理的状態は，ボソンを表す **Neveu–Schwarz セクター**（**NS セクター**）と，フェルミオンを表す **Ramond セクター**（**R セクター**）に分けられる．(2 種類のセクターは，弦のフェルミオン的変数の 2 種類の境界条件に対応する．) これら 2 種類のセクターの取り扱い方は，大きく異なっている．また，閉弦の物理的状態は，ボソンを表す NS-NS セクター，R-R セクターと，フェルミオンを表す NS-R セクター，R-NS セクターに分けられる．(閉弦の振動を表す弦上の波は，右向きの波と左向きの波が独立に存在するため，それぞれのフェルミオン的変数の境界条件を指定する必要があり，4 つのセクターができる．) 超対称性は，NS セクターの状態と R セクターの状態の入れ換えに対する対称性であるため，NSR 形式では超対称性の存在は明白ではない．一方，GS 形式では，NS セクターと R セクターの区別はなく，超対称性は明白である．ただし，GS 形式には，明白に Lorentz 共変な量子化がむずかしいという問題がある．以下では，NSR 形式を使う．

M 理論や超弦理論と超重力理論の対応関係は，次のようになっている．

- **M 理論**

M 理論は 11 次元の理論であり，その低エネルギー有効理論は $D = 11$, $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論である．含まれているゼロ質量場は，

$$e_\mu{}^a, \quad B_{\mu\nu\rho}, \quad \psi_\mu \tag{3.37}$$

である．

- **IIA 型超弦理論**

IIA 型超弦理論は閉弦だけからなる 10 次元の理論であり，その低エネルギー有効理論は $D = 10$, $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論である．含まれているゼロ質量場は，

$$\begin{aligned} &\text{NS-NS セクター：} \ e_\mu{}^a, \quad B_{\mu\nu}, \quad \phi, \\ &\text{R-R セクター：} \ B_{\mu\nu\rho}, \quad B_\mu, \\ &\text{NS-R, R-NS セクター：} \ \psi_{\mu+}, \quad \psi_{\mu-}, \quad \lambda_+, \quad \lambda_- \end{aligned} \tag{3.38}$$

である．

- **IIB 型超弦理論**

IIB 型超弦理論は閉弦だけからなる 10 次元の理論であり，その低エネルギー有効理論は $D = 10$, $\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論である．含まれているゼ

ロ質量場は,

$$
\begin{aligned}
&\text{NS-NS セクター：}\ e_\mu{}^a, \quad B^{(1)}_{\mu\nu}, \quad \phi, \\
&\text{R-R セクター：}\ B^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad B^{(2)}_{\mu\nu}, \quad C, \\
&\text{NS-R, R-NS セクター：}\ 2\psi_{\mu+}, \quad 2\lambda_-
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

である．2 つずつ含まれている 2 階反対称テンソル場とスカラー場を，$B^{(1)}_{\mu\nu}$, $B^{(2)}_{\mu\nu}$ と ϕ, C と表した．

- **I 型超弦理論**

I 型超弦理論は閉弦と開弦からなる 10 次元の理論であり，その低エネルギー有効理論は $D = 10$, $\mathcal{N} = (1, 0)$ の超重力理論とゲージ群が $SO(32)$ の超 Yang–Mills 理論が結合した理論である．含まれているゼロ質量場は,

$$
\begin{aligned}
&\text{閉弦 NS-NS セクター：}\ e_\mu{}^a, \quad \phi, \\
&\text{閉弦 R-R セクター：}\ B_{\mu\nu}, \\
&\text{閉弦 NS-R, R-NS セクター：}\ \psi_{\mu+}, \quad \lambda_-, \\
&\text{開弦 NS セクター：}\ A_\mu, \\
&\text{開弦 R セクター：}\ \chi_+
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

である．

- **ヘテロ型弦理論**

ヘテロ型弦理論は閉弦だけからなる 10 次元の理論であり，その低エネルギー有効理論は $D = 10$, $\mathcal{N} = (1, 0)$ の超重力理論とゲージ群が $SO(32)$ または $E_8 \times E_8$ の超 Yang–Mills 理論が結合した理論である．この理論は閉弦の理論であるが，弦上の右向きの波と左向きの波のうち，片方だけにフェルミオン的な変数があるので，状態は NS セクターと R セクターの 2 つに分けられる．含まれているゼロ質量場は,

$$
\begin{aligned}
&\text{NS セクター：}\ e_\mu{}^a, \quad B_{\mu\nu}, \quad \phi, \quad A_\mu, \\
&\text{R セクター：}\ \psi_{\mu+}, \quad \lambda_-, \quad \chi_+
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

である．

3.5 超反 de Sitter 代数

超重力理論には，Minkowski 時空ではなく，反 de Sitter 時空を場の方程式の解にもつものもある．2.4 節や 2.7 節の AdS 超重力理論がその例である．反 de Sitter 時空解のまわりの場のゆらぎを量子化したときに現れる状態は，超 Poincaré 代数ではなく，**超反 de Sitter 代数**の超多重項をつくる．付録 D で述べるように，D 次元の反 de Sitter 時空は，アイソメトリとして $SO(2, D-1)$

表 3.5　超反 de Sitter 代数.

[redacted]				
7	2, 4, 6, ⋯	$OSp(6,2\|\mathcal{N})$	$SO(2,6)\times USp(\mathcal{N})$	$(\mathbf{8},\boldsymbol{\mathcal{N}})$
6	(2,2)	$F(4)$	$SO(2,5)\times USp(2)$	$(\mathbf{8},\mathbf{2})$
5	2, 4, 6, 10, ⋯	$SU(2,2\|\frac{1}{2}\mathcal{N})$	$SO(2,4)\times U(\frac{1}{2}\mathcal{N})$	$(\mathbf{4},\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{N}})$
	8	$SU(2,2\|4)$	$SO(2,4)\times SU(4)$	$(\mathbf{4},\mathbf{4})$
4	1, 2, 3, ⋯	$OSp(\mathcal{N}\|4)$	$SO(2,3)\times SO(\mathcal{N})$	$(\mathbf{4},\boldsymbol{\mathcal{N}})$

対称性をもつ．この群を含む超代数が超反 de Sitter 代数である．超 Poincaré 代数は，任意の次元 D と超対称性の個数 $\mathcal{N}$ に対して，(それを実現する場の理論が存在するかどうかは別として）数学的には定義できた．しかし，超反 de Sitter 代数の場合は，数学的に矛盾のない代数が定義できる $(D,\mathcal{N})$ の値が限られており，$D\geq 4$ に対しては，表 3.5 に上げた場合だけが可能である*8)．(超重力理論の解の対称性として実現されている代数はさらに少なく，表 3.5 の中の $(D,\mathcal{N})$ のうち，表 3.3 に含まれている $(D,\mathcal{N})$ の場合だけである.）特に，$D\geq 8$ では超反 de Sitter 代数は存在しない．反 de Sitter 時空を含む場の方程式の解が超対称性をもっているときは，その解の対称性はこれらの超反 de Sitter 代数のどれかで表される．したがって，8 次元以上の反 de Sitter 時空解には，超対称性をもつ解は存在しないことになる．

超反 de Sitter 代数の生成子は，$SO(2,D-1)$ の生成子 M_{AB} $(A,B=0,1,\cdots,D)$，コンパクト群 K' の生成子 T_I $(I=1,\ 2,\ \cdots,\ \dim K')$，超電荷 Q^i，中心電荷である．各 $(D,\mathcal{N})$ に対して，$SO(2,D-1)\times K'$ を，ボソン的部分群として表 3.5 に示した．これらの生成子の（反）交換関係は，

$$
\begin{aligned}
&[M_{AB},\,M_{CE}]=-i\,\eta_{BC}\,M_{AE}+i\,\eta_{BE}\,M_{AC}+i\,\eta_{AC}\,M_{BE}-i\,\eta_{AE}\,M_{BC},\\
&[T_I,\,T_J]=i\,f_{IJ}{}^K\,T_K,\\
&[M_{AB},\,Q^i]=\frac{1}{2}\,i\,\sigma_{AB}\,Q^i,\\
&[T_I,\,Q^i]=-(t_I)^i{}_j\,Q^j,\\
&\{Q^i,\,\bar{Q}_j\}=i\,\sigma^{AB}\,M_{AB}\,\delta^i_j+(t^I)^i{}_j\,T_I
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

である．ここで，η^{AB} は付録 D の (D.1) で定義される $SO(2,D-1)$ 計量である．σ_{AB} は，$a,\ b=0,\ 1,\ \cdots,\ D-1$ として，

$$
\sigma_{ab}=\gamma_{ab},\qquad \sigma_{aD}=\gamma_a \tag{3.43}
$$

で与えられる．$f_{IJ}{}^K$ と t_I は，K' の Lie 代数の構造定数と表現行列である．簡単のため，中心電荷は省略した．生成子 T_I は，超 Poincaré 代数の自己同形群の生成子と似ているが，その場合と違い，超電荷の反交換関係の右辺にも現れ

*8)　W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B135** (1978) 149.

ている．したがって，T_I を含めて考えないと，代数は（反）交換関係に関して閉じていない．

反 de Sitter 時空は，その半径を無限大にする極限で Minkowski 時空に近づく．これに対応して，超反 de Sitter 代数に対して適当な極限をとることにより，超 Poincaré 代数を得ることができる．まず，生成子 M_{AB} を M_{ab} と M_{aD} ($a,\ b=0,\ 1,\ \cdots,\ D-1$) に分け，パラメータ m を導入して，

$$M_{aD} \ \rightarrow\ \frac{1}{m}P_a, \quad T_I \ \rightarrow\ \frac{1}{m}T_I, \quad Q^i \ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{m}}Q^i \tag{3.44}$$

と置き換える．このパラメータ m は，反 de Sitter 時空の半径の逆数に当たる．これらを使って，(3.42) を書き直すと，

$$\begin{aligned}
&[M_{ab},\, M_{cd}] = -i\,\eta_{bc}\,M_{ad} + i\,\eta_{bd}\,M_{ac} + i\,\eta_{ac}\,M_{bd} - i\,\eta_{ad}\,M_{bc},\\
&[M_{ab},\, P_c] = -i\,\eta_{bc}\,P_a + i\,\eta_{ac}\,P_b,\\
&[P_a,\, P_b] = -i\,m^2\,M_{ab},\\
&[T_I,\, T_J] = i\,m\,f_{IJ}{}^K\,T_K,\\
&[M_{ab},\, Q^i] = \frac{1}{2}\,i\,\gamma_{ab}\,Q^i,\\
&[P_a,\, Q^i] = \frac{1}{2}\,i\,m\,\gamma_a\,Q^i,\\
&[T_I,\, Q^i] = -m\,(t_I)^i{}_j\,Q^j,\\
&\{Q^i,\, \bar{Q}_j\} = -2\,i\,\gamma^a\,P_a\,\delta^i_j + i\,m\,\sigma^{ab}\,M_{ab}\,\delta^i_j + (t^I)^i{}_j\,T_I
\end{aligned} \tag{3.45}$$

となる．(2.4 節や 2.7 節の AdS 超重力理論の局所超変換の交換関係で，反 de Sitter 時空解を背景場として使うと，この $\{Q, \bar{Q}\}$ の形に対応していることがわかる.) ここで，$m \to 0$ の極限をとると，超 Poincaré 代数の（反）交換関係が得られる．このような操作を，**Inönü–Wigner 縮約**（Inönü–Wigner contraction）という．P_a は並進の生成子に，M_{ab} は Lorentz 変換の生成子になっている．また，T_I はすべての生成子と交換し，中心電荷になっている．

超反 de Sitter 代数 (3.42) に対しては，別の Inönü–Wigner 縮約の取り方もある．(3.44) で T_I に対しては置き換えをしない場合には，T_I を含む（反）交換関係は，(3.45) の代わりに，

$$\begin{aligned}
&[T_I,\, T_J] = i\,f_{IJ}{}^K\,T_K,\\
&[T_I,\, Q^i] = -(t_I)^i{}_j\,Q^j,\\
&\{Q^i,\, \bar{Q}_j\} = -2\,i\,\gamma^a\,P_a\,\delta^i_j + i\,m\,\sigma^{ab}\,M_{ab}\,\delta^i_j + m\,(t^I)^i{}_j\,T_I
\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる．$m \to 0$ の極限をとると，再び超 Poincaré 代数の（反）交換関係が得られるが，この場合の T_I は，3.2 節で述べた超 Poincaré 群の自己同形群 K の部分群 K' の生成子になっている．

第 4 章
非コンパクト対称性

超重力理論に現れる非コンパクト対称性について述べる．スカラー場は，非コンパクト群をその極大コンパクト部分群で割った商空間に値をもつ非線形シグマ模型によって記述される．偶数次元の理論では，非コンパクト対称性の変換は，反対称テンソル場に対して双対変換として作用する場合がある．

4.1 非線形シグマ模型

超重力理論に含まれるスカラー場は，非コンパクト Lie 群 G とその極大コンパクト部分群 H に対する G/H **非線形シグマ模型**（non-linear σ-model）によって記述される．非線形シグマ模型は，商空間 G/H に値をもつスカラー場の理論で，非線形に実現された大局的な G 対称性を持っている．非コンパクト群 G の Killing 形式は正定値ではないが，それを極大コンパクト部分群で割った商空間 G/H は正定値な計量をもつ空間であり，運動項が通常と逆符号になっているようなゴースト場を含まない理論を構成できる．この節では，G/H 非線形シグマ模型の構成について述べる*1)．

G/H に値をもつスカラー場を表すために，まず G の表現行列に値をもつスカラー場 $V(x)$ を導入し，理論に対し局所 H 不変性を要請する．独立な H ゲージ場を導入しないので，$V(x)$ の自由度のうち部分群 H の部分はゲージ自由度として落ち，物理的な自由度は商空間 G/H の部分だけになる．独立なスカラー場の個数は，$\dim G/H = \dim G - \dim H$ である．$V(x)$ に対して，大局的な G 変換が

$$V(x) \ \rightarrow \ gV(x) \qquad (g \in G) \tag{4.1}$$

のように左から作用し，局所的な H 変換が

*1) S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239; C.G. Callan, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2247.

$$V(x) \;\to\; V(x)\,h^{-1}(x) \qquad (h(x) \in H) \tag{4.2}$$

のように右から作用するとする．これらの変換に対して不変なラグランジアンを構成する．

まず，G の Lie 代数 $\mathcal{G}$ を，H の Lie 代数 $\mathcal{H}$ とその直交補空間 $\mathcal{N}$ に

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{N} \tag{4.3}$$

と分解する．直交性は，Killing 形式によって定義する．表現行列に対するトレースを使うと，$\mathrm{tr}(\mathcal{H}\mathcal{N}) = 0$ となる．簡単な計算によって

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}, \qquad [\mathcal{H}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N} \tag{4.4}$$

となることが示せる．$\mathcal{G}$ に値をもつ $V^{-1}\partial_\mu V$ を

$$V^{-1}\,\partial_\mu V = Q_\mu + P_\mu, \qquad Q_\mu \in \mathcal{H}, \quad P_\mu \in \mathcal{N} \tag{4.5}$$

のように分解する．Q_μ, P_μ は，大局的 G 変換 (4.1) に対しては不変である．一方，局所的 H 変換 (4.2) に対しては，交換関係 (4.4) を使うと，

$$\begin{aligned} Q_\mu \;&\to\; h\,Q_\mu\,h^{-1} + h\,\partial_\mu\,h^{-1}, \\ P_\mu \;&\to\; h\,P_\mu\,h^{-1} \end{aligned} \tag{4.6}$$

のように変換することがわかる．Q_μ は H ゲージ場の変換をしている．また，P_μ は H 変換に対して共変的に変換している．式 (4.5) から，P_μ を

$$P_\mu = V^{-1}\,(\partial_\mu V - V\,Q_\mu) \equiv V^{-1}\,D_\mu V \tag{4.7}$$

のように，H 共変微分 D_μ を使って表すこともできる．

これらの量を使うことにより，大局的 G 変換と局所的 H 変換に対して不変なラグランジアンを構成することができる．スカラー場の運動項は

$$\mathcal{L} = -a\,e\;\mathrm{tr}(P_\mu\,P^\mu) \qquad (a \text{ は正の定数}) \tag{4.8}$$

によって与えられる．このラグランジアンは，V の微分について 2 次式であり，大局的 G 変換と局所的 H 変換に対して明白に不変である．また，H ゲージ場 Q_μ を使うと，局所的 H 変換をする他の場に対する共変微分を定義することができる．たとえば，スピノール場 $\psi(x)$ が局所的 H 変換に対して $\psi(x) \to h(x)\psi(x)$ と変換するとき，それに対する共変微分は

$$D_\mu\,\psi = (\partial_\mu + Q_\mu)\,\psi \tag{4.9}$$

と書ける．また，P_μ を使うと，

$$\mathcal{L} = e\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,P_\mu\,\psi \tag{4.10}$$

のような H 不変な相互作用項をつくることもできる．さらに，V を使って，G

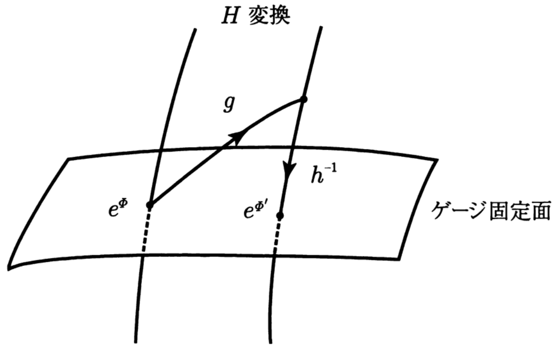


図 4.1　ゲージ固定した場合の G 変換.

の表現によって変換する場の不変な運動項を構成することができる（下の例を参照）.

場 $V(x)$ には非物理的な自由度が含まれているが，局所 H 対称性のゲージを固定すると，物理的な自由度だけを使って理論を記述することができる．ゲージ固定は，たとえば，次のように行うことができる．G の一般的な元は，$\Phi(x)$ を G の Lie 代数に値をもつ場として，

$$V(x) = e^{\Phi(x)} \tag{4.11}$$

と書くことができる．ここで，$\Phi(x)$ が $\mathcal{N}$ にだけ値をもつとするとゲージが固定され，物理的自由度が $\Phi(x)$ によって表される．このゲージ固定条件は，G 変換 (4.1) を行うと満たされなくなる．ゲージ条件を保つためには，図 4.1 のように，G 変換と同時に，g によって決まる相殺 H 変換 $h(x;g)$ を行う必要がある．したがって，場 $\Phi(x)$ の G 変換は，

$$e^{\Phi(x)} \;\to\; e^{\Phi'(x)} = g\, e^{\Phi(x)}\, h^{-1}(x;g) \tag{4.12}$$

と表される．H 変換 $h(x;g)$ は，$\Phi'(x)$ が $\mathcal{N}$ の元になるように選ぶ．変換 $\Phi(x) \to \Phi'(x)$ は，群 G の非線形実現である．変換 $g \in G$ が G の部分群 H の元であるときは，$h(x;g) = g$ と選ぶことができ，g は線形に実現されている．

物質多重項のない場合の超重力理論に現れる大局的対称性の群 G とその極大コンパクト部分群 H を，表 4.1 にまとめた*2)．最後の列は，商空間 G/H の次元を表している．それぞれの超重力理論で，商空間 G/H の次元が，表 3.3 のスカラー場の個数と一致していることが確かめられる．G がコンパクト群のときは，$H = G$ であり，スカラー場は含まれていない．超重力理論に含まれる場のうち，重力場とスカラー場以外のボソン場は G に対してだけ変換し，フェルミオン場は H に対してだけ変換する．重力場はどちらに対しても不変で，ス

*2)　群の定義については，付録 A.3 または参考文献 [22] を参照せよ．

表 4.1　超重力理論に現れる大局的対称性 G とその極大コンパクト部分群 H.

[redacted]				
11	1	1	1	0
10	(1,1)	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
	(2,0)	$SL(2,\mathbb{R})$	$SO(2)$	2
	(1,0)	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
9	2	$GL(2,\mathbb{R})$	$SO(2)$	3
	1	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
8	2	$SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$	$SO(3) \times SO(2)$	7
	1	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
7	4	$SL(5,\mathbb{R})$	$SO(5)$	14
	2	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
6	(4,4)	$SO(5,5)$	$SO(5) \times SO(5)$	25
	(4,2)	$SO(5,1)$	$SO(5)$	5
	(2,2)	$GL(1,\mathbb{R})^+$	1	1
	(4,0)	$USp(4)$	$USp(4)$	0
	(2,0)	$USp(2)$	$USp(2)$	0
5	8	$E_{6(+6)}$	$USp(8)$	42
	6	$SU^*(6)$	$USp(6)$	14
	4	$USp(4) \times GL(1,\mathbb{R})^+$	$USp(4)$	1
	2	$USp(2)$	$USp(2)$	0
4	8	$E_{7(+7)}$	$SU(8)$	70
	6	$SO^*(12)$	$U(6)$	30
	5	$SU(5,1)$	$U(5)$	10
	4	$SU(4) \times SL(2,\mathbb{R})$	$U(4)$	2
	3	$U(3)$	$U(3)$	0
	2	$U(2)$	$U(2)$	0
	1	$U(1)$	$U(1)$	0

カラー場は両方に対して変換する.

例：$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ 非線形シグマ模型

超重力理論に現れる G/H 非線形シグマ模型の例として，$G = SL(2,\mathbb{R}) \sim SU(1,1)$, $H = SO(2) \sim U(1)$ の場合を考えよう．この非線形シグマ模型は，$D = 10$, $\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論や $D = 4$, $\mathcal{N} = 4$ 超重力理論などに現れる．$SL(2,\mathbb{R})$ に値をもつスカラー場は，行列式が 1 の 2×2 実行列 $V(x)$ で表される．大局的 $SL(2,\mathbb{R})$ 変換と局所的 $SO(2)$ 変換は，それぞれ，(4.1) と (4.2) で，

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1), \\ h(x) &= \begin{pmatrix} \cos\theta(x) & -\sin\theta(x) \\ \sin\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix} \qquad (\theta(x) \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

とした式で与えられる．局所 $SO(2)$ 変換のゲージを固定して，

$$V(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\phi(x)} & C(x)\, e^{\frac{1}{2}\phi(x)} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\phi(x)} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

とすることができる．ここで，$\phi(x)$ と $C(x)$ は 2 つの実スカラー場である．このゲージでは，(4.5) から決まる P_μ と Q_μ は，$V^{-1}\partial_\mu V$ の対称行列の部分と反対称行列の部分で与えられ，

$$P_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\partial_\mu\phi & e^\phi\,\partial_\mu C \\ e^\phi\,\partial_\mu C & \partial_\mu\phi \end{pmatrix}, \quad Q_\mu = -\frac{1}{2}\,e^\phi\,\partial_\mu C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

となる．これを使うと，ラグランジアン (4.8) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -e\ \mathrm{tr}\,(P_\mu P^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\,e\left(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + e^{2\phi}\,\partial_\mu C\,\partial^\mu C\right) \\ &= -\frac{1}{2}e\,\frac{\partial_\mu\tau\,\partial^\mu\tau^*}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2} \end{aligned} \tag{4.16}$$

と書ける．ここで，複素上半面に値をもつ複素スカラー場

$$\tau(x) = C(x) + i\,e^{-\phi(x)} \tag{4.17}$$

を導入した．この複素スカラー場は，$SL(2,\mathbb{R})$ 変換（と相殺 $SO(2)$ 変換）に対して

$$\tau \ \rightarrow\ \frac{a\,\tau + b}{c\,\tau + d} \tag{4.18}$$

のように非線形な 1 次分数変換をする．ラグランジアン (4.16) が変換 (4.18) に対して不変であることは，容易に確かめられる．他の場との結合の例として，2 つの実ベクトル場の組 $\mathcal{A}_\mu = (A_\mu^{(1)}, A_\mu^{(2)})$ を考えよう．場の強さを $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]}$ として，ラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,e\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,V\,V^T\,\mathcal{F}^{T\mu\nu} \tag{4.19}$$

をつくる．ベクトル場が $SL(2,\mathbb{R})$ 変換に対して $\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu g^{-1}$ と変換すれば，このラグランジアンは大局的 $SL(2,\mathbb{R})$ 変換と局所 $SO(2)$ 変換に対して不変である．(4.14) のようにゲージ固定すれば，このラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,e\,e^{-\phi}\,F_{\mu\nu}^{(1)}\,F^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{4}\,e\,e^{\phi}\,(F_{\mu\nu}^{(2)} + C\,F_{\mu\nu}^{(1)})\,(F^{(2)\mu\nu} + C\,F^{(1)\mu\nu})$$

となる．$\mathcal{A}_\mu$ は非コンパクト群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現によって変換するが，運動項が通常と逆符号になっているようなゴースト場は現れていない．

4.2 双対対称性

4.2.1 Maxwell 理論における双対対称性

偶数次元の超重力理論では，このような非コンパクト対称性が，反対称テンソル場の**双対対称性**として実現されている場合がある．この節では，このような双対対称性について議論する．双対対称性は，電磁気学における電気・磁気双対性の一般化である．まず，Maxwell 理論を簡単な例として，双対対称性がどのようなものかを説明する．電荷密度や電流密度がない場合の Maxwell 方程式は，場の方程式と Bianchi 恒等式

$$\partial_\mu (e F^{\mu\nu}) = 0, \qquad \partial_\mu (e *F^{\mu\nu}) = 0 \tag{4.20}$$

からなる．ここで，場の強さ $F_{\mu\nu}$ とその **Hodge 双対** $*F_{\mu\nu}$ は，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{4.21}$$

と定義されている．方程式の組 (4.20) は，定数 A, B, C, D を無限小パラメータとする大局的な変換

$$\delta \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ *F^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ *F^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

に対して不変である．ただし，$F^{\mu\nu}$ と $*F^{\mu\nu}$ は独立ではなく，式 (4.21) によって結びついていることに注意する必要がある．式 (4.22) の上の式の Hodge 双対をとり，恒等式 $*^2 F = -F$ を使うと，$\delta *F = A*F - BF$ が得られる．これが下の式と一致することから，変換のパラメータが $D = A$ と $C = -B$ を満たす必要があることがわかる．この変換は，複素数の基底を選ぶと，

$$\delta \begin{pmatrix} F + i*F \\ F - i*F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F + i*F \\ F - i*F \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

と書ける．この変換は群 $GL(1, \mathbb{C})$ をなしている．このような場の方程式と Bianchi 恒等式の入れ換えを含むような変換を**双対変換**（duality transformation）とよび，それに対する対称性を**双対対称性**（duality symmetry）という．

上の双対対称性の議論では，作用の不変性ではなく，場の方程式の不変性を考えた．その理由は，双対変換は場の方程式が満たされているときだけ矛盾なく定義できるためである．電磁場の独立な場の変数は A_μ であり，(4.22) の $\delta F_{\mu\nu}$ は，

$$\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu = A F_{\mu\nu} + B *F_{\mu\nu} \tag{4.24}$$

のように，δA_μ から導かれるべきものである．この式が δA_μ について積分可能であることから，$\partial_\mu [e*(AF + B*F)^{\mu\nu}] = 0$ でなければならない．そのため，場の方程式 $\partial_\mu (eF^{\mu\nu}) = 0$ が要求される．したがって，双対変換に対して不変な理論をつくるためには，場の方程式の不変性を考える必要がある．

4.2.2 一般の偶数次元における双対対称性

一般の偶数次元 $D=2n$ における相互作用している場の理論の双対対称性を考えよう*3). $n-1$ 階の反対称テンソル場 $B^I_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}(x)$ $(I=1,\cdots,M)$ が他の場 $\varphi^i(x)$ と相互作用している場合を考える. 場の強さとその Hodge 双対は

$$F^I_{\mu_1\cdots\mu_n} = n\,\partial_{[\mu_1} B^I_{\mu_2\cdots\mu_n]},$$
$$*\,F^{I\mu_1\cdots\mu_n} = \frac{1}{n!}\,e^{-1}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n\nu_1\cdots\nu_n}\,F^I_{\nu_1\cdots\nu_n} \tag{4.25}$$

と定義される. D 次元では, Hodge 双対は

$$*^2 F = \epsilon\, F, \qquad \epsilon = \begin{cases} +1 & (D=4k+2), \\ -1 & (D=4k), \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{4.26}$$

を満たす. ラグランジアン $\mathcal{L}$ は, 場の強さ $F^I_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を通してのみ場 $B^I_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}$ に依存しているとする. また, 場の強さの 2 次までを含んでいるとする. この理論に対して双対対称性を要請して, ラグランジアンの形に対する条件と, 可能な双対対称性の群を求めよう.

場 $B^I_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}$ に対する場の方程式と Bianchi 恒等式は

$$\partial_{\mu_1}\left(e\,*G_I^{\mu_1\cdots\mu_n}\right)=0, \qquad \partial_{\mu_1}\left(e\,*F^{I\,\mu_1\cdots\mu_n}\right)=0 \tag{4.27}$$

である. ここで, $G_{I\mu_1\cdots\mu_n}$ を

$$*G_I^{\mu_1\cdots\mu_n} = -\frac{\epsilon\,n!}{e}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^I_{\mu_1\cdots\mu_n}} \tag{4.28}$$

によって定義した. (相互作用のない場合は, $G_I^{\mu_1\cdots\mu_n} = *F^{I\mu_1\cdots\mu_n}$ となる.) 方程式 (4.27) は, 変換

$$\delta\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \qquad \delta\,\varphi^i = \xi^i(\varphi) \tag{4.29}$$

に対して不変である. A, B, C, D は $n\times n$ 実定数行列であり, $\xi^i(\varphi)$ は場 φ^i の関数である. Maxwell 理論の場合のように, これらの定数は独立ではない. これらの定数の満たすべき条件を, 変換 (4.29) に対する (i) G_I の定義 (4.28) の不変性と (ii) φ^i の場の方程式の不変性から求める.

まず, G_I の不変性から考えよう. (4.28) によって, G_I は F^I と φ^i を使って表されている. したがって, G_I の変換は, F^I と φ^i の変換から導くことができる. (4.28) から

$$\begin{aligned}\delta *G_I &= -\frac{\epsilon\,n!}{e}\left((AF+BG)^J\,\frac{\partial}{\partial F^J} + \xi^i\,\frac{\partial}{\partial\varphi^i} + \partial_\mu\,\xi^i\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^I} \\ &= -\frac{\epsilon\,n!}{e}\frac{\partial\,\delta\mathcal{L}}{\partial F^I} - *G_J\,A^J{}_I - *G_J\,B^{JK}\,\frac{\partial G_K}{\partial F^I}\end{aligned} \tag{4.30}$$

*3) 4 次元の場合は, M.K. Gaillard and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 221 で議論された. この議論は, Y. Tanii, *Phys. Lett.* **B145** (1984) 197; 修士論文 (1984) によって一般の偶数次元に拡張された.

が得られる．この変換が (4.29) の下の式の Hodge 双対 $\delta{*}G_I = C_{IJ}{*}F^J + D_I{}^J{*}G_J$ と一致することから

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial F^I}\left[n!\,\delta\mathcal{L} + \frac{1}{2}\,\epsilon\, e\, F^J\, C_{JK}\,{*}F^K + \frac{1}{2}\,\epsilon\, e\,{*}G_J\, B^{JK}\, G_K\right] \\ &\qquad - \left(A^J{}_I + D_I{}^J\right)\, n!\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^J} \\ &= -\frac{1}{2}\,\epsilon\, e\,\left(C_{IJ} + \epsilon\, C_{JI}\right)\,{*}F^J - \frac{1}{2}\,\epsilon\, e\,{*}G_J\left(B^{JK} + \epsilon\, B^{KJ}\right)\frac{\partial G_K}{\partial F^I} \end{aligned} \tag{4.31}$$

が得られる．相互作用がある場合は，この式は変換のパラメータに対する条件

$$A^I{}_J + D_J{}^I = \alpha\,\delta^I_J, \quad B^{IJ} = -\epsilon\, B^{JI}, \quad C_{IJ} = -\epsilon\, C_{JI} \tag{4.32}$$

および，ラグランジアンの変分に対する条件

$$\frac{\partial}{\partial F^I}\left[\delta\mathcal{L} + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\, F^J\, C_{JK}\,{*}F^K + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\,{*}G_J\, B^{JK}\, G_K - \alpha\,\mathcal{L}\right] = 0 \tag{4.33}$$

を与える．ここで，α は任意の定数である．

次に，φ^i の場の方程式

$$E_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right) = 0 \tag{4.34}$$

の不変性を考えよう．双対変換 (4.29) に対して，

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \left((AF+BG)^I\,\frac{\partial}{\partial F^I} + \xi^j\,\frac{\partial}{\partial\varphi^j} + \partial_\mu\,\xi^j\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi^j)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i} \\ &\qquad - \partial_\mu\left[\left((AF+BG)^I\,\frac{\partial}{\partial F^I} + \xi^j\,\frac{\partial}{\partial\varphi^j} + \partial_\mu\,\xi^j\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi^j)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\varphi^i} - \partial_\mu\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right)\left(\delta\mathcal{L} + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\,{*}G_I\, B^{IJ}\, G_J\right) - \frac{\partial\xi^j}{\partial\varphi^i}\, E_j \end{aligned} \tag{4.35}$$

が得られる．これが共変的な変換

$$\delta E_i = -\frac{\partial\xi^j}{\partial\varphi^i}\, E_j \tag{4.36}$$

になるとすると，ラグランジアンの変分に対するもう 1 つの条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^i} - \partial_\mu\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right)\left[\delta\mathcal{L} + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\,{*}G_I\, B^{IJ}\, G_J\right] = 0 \tag{4.37}$$

が得られる．

条件 (4.32), (4.33), (4.37) は，可能な双対変換群に対して制限を与える．まず，(4.33) と (4.37) を比較することにより，$\alpha = 0$ となることがわかる．すると，パラメータに対する条件 (4.32) は，まとめて

$$X^T\Omega + \Omega X = 0 \tag{4.38}$$

と書ける．ここで，

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

とおいた．時空の次元が $D = 4k$ $(\epsilon = -1)$ のときは，Ω は反対称行列で，上の条件から双対変換群は $Sp(2M, \mathbb{R})$ またはその部分群であることがわかる．また，$D = 4k + 2$ $(\epsilon = +1)$ のときは，Ω は対称行列で，対角化すると $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．したがって，この場合の双対変換群は $SO(M, M)$ またはその部分群である．条件 (4.32), (4.33), (4.37), $\alpha = 0$ から，ラグランジアンの変分は

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\, F^I\, C_{IJ} *F^J - \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e *G_I\, B^{IJ}\, G_J \\ &= \delta\left(-\frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\, F^I *G_I\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる．ラグランジアンは双対変換に対して不変ではないが，ある決まった形の変換をすることがわかる．

また，ラグランジアンをそれに含まれる不変なパラメータ λ で微分したものは不変であることが，次のようにしてわかる．$\delta\mathcal{L}$ を λ で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(AF + BG)^I\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^I} + \xi^i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i} + \partial_\mu\,\xi^i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\right] \\ &= \delta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right) - \frac{\epsilon}{n!}\, e *G_I\, B^{IJ}\,\frac{\partial G_J}{\partial\lambda} \end{aligned} \tag{4.41}$$

となる．ここで，ξ^i が λ に依存しないことを仮定した．したがって，

$$\delta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\delta\mathcal{L} + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\, F^I\, C_{IJ} * F^J + \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e * G_I\, B^{IJ}\, G_J\right) \tag{4.42}$$

となり，さらに (4.40) を使うと右辺はゼロになる．不変なパラメータ λ としては，計量 $g_{\mu\nu}(x)$ のような不変な外場を考えることもできる．場のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ は，ラグランジアンを計量で微分したものなので，双対変換に対して不変であることがわかる．

変換性が (4.40) となるようなラグランジアンの具体的な形を求めよう．そのようなラグランジアンは，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\, F^I *G_I + (\text{不変な項}) \\ &= -\frac{1}{2n!}\epsilon\, e\, F^I *G_I - \frac{1}{2n!}\,\epsilon\, e\,(F^I\, I_I + \epsilon\, G_I\, H^I) + \mathcal{L}_{\mathrm{inv}}(\varphi, \partial\varphi) \end{aligned} \tag{4.43}$$

と書ける．φ とその微分 $\partial_\mu\varphi$ からつくった n 階の反対称テンソルの組 $(H^I_{\mu_1\cdots\mu_n}(\varphi, \partial\varphi), I_{I\,\mu_1\cdots\mu_n}(\varphi, \partial\varphi))$ は，(4.29) の (F^I, G_I) と同じ形の変換をするとする．$\mathcal{L}_{\mathrm{inv}}(\varphi, \partial\varphi)$ は，φ だけに依存する不変な項である．簡単のため，2 行目の式では双対対称性が最大のもの，つまり，$D = 4k$ のときは $Sp(2M, \mathbb{R})$,

$D=4k+2$ のときは $SO(M,M)$ であると仮定した．対称性がこれらの部分群である場合は，$F\cdot I+\epsilon G\cdot H$ 以外の不変量も可能である．(4.43) を (4.28) に代入すると，$*G$ に対する微分方程式

$$(*G-I)_I=(F-\epsilon *H)^J\,\frac{\partial}{\partial F^I}\,(*G-I)_J \tag{4.44}$$

が得られる．ラグランジアンが F^I について 2 次であり，したがって G_I が F^I の 1 次だと仮定すると，この方程式の解は

$$*G_I=I_I+\epsilon\,K_{IJ}(\varphi)\,(F^J-\epsilon *H^J) \tag{4.45}$$

と書ける．ただし，$*$ を反対称テンソルに作用する演算子とみなして，

$$K_{IJ}(\varphi)\;=\;K_{1IJ}(\varphi)+K_{2IJ}(\varphi)*\quad (K_1^T=K_1,\;K_2^T=-\epsilon\,K_2) \tag{4.46}$$

とおいた．双対変換に対して (4.45) が不変であることを要請すると，K は

$$\delta K=-KA-KBK*+\epsilon C*+DK \tag{4.47}$$

のように変換しなければならないことがわかる．(4.45) を (4.43) に代入すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\;=\;&-\frac{1}{2n!}\,e\,F^I\,K_{IJ}\,F^J-\frac{1}{n!}\,\epsilon\,e\,F^I\,(I_I-K_{IJ}*H^J)\\&+\frac{1}{2n!}\,e*H^I\,(I_I-K_{IJ}*H^J)+\mathcal{L}_{\rm inv}(\varphi,\,\partial\varphi)\end{aligned} \tag{4.48}$$

が得られる．上に述べた変換性をもつ関数 $K_{IJ}(\varphi)$, $H^I(\varphi,\partial\varphi)$, $I^I(\varphi,\partial\varphi)$ を見つけることができれば，具体的なラグランジアンを求めることができる．

4.2.3　コンパクト双対対称性

まず，$K=1$ の場合を考えよう．この場合は，双対対称性はコンパクト群になる．(4.47) で $K=1$ とおくと，変換のパラメータは

$$A=D,\qquad B=\epsilon\,C \tag{4.49}$$

を満たさなければならないことがわかる．$D=4k$ $(\epsilon=-1)$ のときは，

$$X=\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix},\qquad A^T=-A,\quad B^T=B \tag{4.50}$$

となり，変換則は

$$\delta\begin{pmatrix}F+iG\\ F-iG\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-i\,B & 0\\ 0 & A+i\,B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F+iG\\ F-iG\end{pmatrix} \tag{4.51}$$

と書ける．$A-iB$ は反エルミート行列なので，双対対称性は $U(M)$ またはその部分群である．$U(M)$ は $Sp(2M,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である．一方，$D=4k+2$ $(\epsilon=+1)$ のときは，

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad A^T = -A, \quad B^T = -B \tag{4.52}$$

となり，変換則は

$$\delta \begin{pmatrix} F+G \\ F-G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F+G \\ F-G \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

と書ける．$A+B$ と $A-B$ は実反対称行列なので，双対対称性は $SO(M) \times SO(M)$ またはその部分群である．$SO(M) \times SO(M)$ は，$SO(M,M)$ の極大コンパクト部分群である．

例：$D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論

コンパクトな双対対称性をもつ理論の例として，2.6 節で議論した $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論を見直してみよう．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a$, 2 個の Majorana Rarita–Schwinger 場 ψ_μ^i $(i = 1, 2)$, ベクトル場 B_μ である．ラグランジアン (2.47) から導かれる場の方程式は，大局的な $U(1)$ 変換 (2.57) に対して不変である．この $U(1)$ 変換は，ベクトル場に対して双対変換として作用している．ラグランジアンから (4.28) によって定義される $*G_{\mu\nu}$ の具体的な形は，

$$*G_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} - *H_{\mu\nu} + I_{\mu\nu} \tag{4.54}$$

となる．ここで，

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\, i\, \epsilon^{ij}\, \bar{\psi}_\mu^i\, \gamma_5\, \psi_\nu^j, \qquad I_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon^{ij}\, \bar{\psi}_\mu^i\, \psi_\nu^j \tag{4.55}$$

である．この (H, I) が，(F, G) と同じ形の変換をすることは容易に確かめられる．さらに，$\delta F_{\mu\nu}$, $\delta\psi_\mu$ から得られる (4.54) の $G_{\mu\nu}$ の変換は，(2.57) の $G_{\mu\nu}$ の変換を正しく再現する．(4.54) の $G_{\mu\nu}$ を使うと，ラグランジアン (2.47) は，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\, e\, F_{\mu\nu} * G^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\, e\, (F_{\mu\nu}\, I^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\, H^{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\text{inv}} \tag{4.56}$$

のように書け，(4.43) の形になっていることがわかる．

4.2.4　非コンパクト双対対称性

4.1 節で議論した G/H 非線形シグマ模型を使うと，(4.47) のように変換する $K_{IJ}(\varphi)$ を構成することができる．G は双対対称性の群，H はその極大コンパクト部分群とする．スカラー場 $V(x)$ は群 G に値をもち，(4.39) の Ω に対して，

$$V(x)^T\, \Omega\, V(x) = \Omega \tag{4.57}$$

を満たす．また，大局的な G 変換と局所的な H 変換の下で，(4.1), (4.2) のように変換する．無限小変換の場合の $g \in G$ は，(4.38) を満たす X を使って，

$g = 1+X$ と書ける．また，無限小変換の場合の $h(x) \in H$ を $h(x) = 1+X_H(x)$ と書くと，X_H は (4.50) または (4.52) の形

$$X_H = \begin{pmatrix} A_H & B_H \\ \epsilon B_H & A_H \end{pmatrix}, \quad A_H^T = -A_H,\ B_H^T = -\epsilon B_H \tag{4.58}$$

をしている．これらを使うと，$V(x)$ の無限小変換は，

$$\delta V(x) = X\,V(x) - V(x)\,X_H(x) \tag{4.59}$$

となる．$X_H(x)$ は反対称行列なので，VV^T という組み合わせは H 変換に対して不変である．また，G 変換に対しては，

$$\delta\,(V\,V^T) = X\,V\,V^T + V\,V^T\,X^T \tag{4.60}$$

と変換する．

K_{IJ} の変換性 (4.47) は，F^I と G_I の関係 (4.45) が G 変換に対して不変であることから得られた．ここでは，明白に G 不変な F^I と G_I の関係を書き下し，そこから K_{IJ} を求めよう．まず，

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

とおくと，これらは G 変換に対して

$$\delta\,\mathcal{F} = X\mathcal{F}, \qquad \delta\,\mathcal{H} = X\mathcal{H} \tag{4.62}$$

と変換する．これらを使って，G と F の関係 (4.45) が，

$$*\mathcal{F} - \mathcal{H} = \epsilon\,V\,V^T\,\Omega\,(\mathcal{F} - \epsilon\,*\mathcal{H}) \tag{4.63}$$

と書けるとしよう．変換 (4.60), (4.62) と条件 (4.38) を使うと，この式が G 変換と H 変換に対して不変であることがわかる．さらに，$V = 1$ のときは，(4.45) で $K = 1$ とした式になる．以下では，$D = 4k$ の場合と $D = 4k+2$ の場合に分けて，(4.63) を (4.45) の形に書き直し，K_{IJ} を求める．

$D = 4k$ の場合

この場合は，(4.51) のような複素数の基底を使うと便利である．ユニタリー行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

を使って，

$$\mathcal{F}' = U\mathcal{F}, \quad \mathcal{H}' = U\mathcal{H}, \quad \Omega' = U^{-1T}\,\Omega\,U^{-1}, \quad V' = UVU^{-1} \tag{4.65}$$

のように基底を変更する．(4.57) から，この基底でのスカラー場は $V'^T\,\Omega' V' =$

Ω' を満たすので，複素 $M \times M$ 行列に値をもつスカラー場 $u(x), v(x)$ を使って，

$$V'(x) = \begin{pmatrix} u(x) & v(x)^* \\ v(x) & u(x)^* \end{pmatrix}, \quad u^\dagger u - v^\dagger v = 1, \quad u^T v = v^T u \tag{4.66}$$

と書くことができる．この基底でのスカラー場の変換を $V' \to g' V' h'^{-1}$ と書くと，G 変換の行列 g' と H 変換の行列 h' は，

$$\begin{aligned} g' &= \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad a^\dagger a - b^\dagger b = 1, \quad a^T b = b^T a, \\ h' &= \begin{pmatrix} a_H & 0 \\ 0 & a_H^* \end{pmatrix}, \quad a_H^\dagger a_H = 1 \end{aligned} \tag{4.67}$$

となる．無限小変換の場合は，前の基底での変換パラメータと

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2}(A - i\,B + i\,C + D), \\ b &= \frac{1}{2}(A + i\,B + i\,C - D), \\ a_H &= 1 + A_H - i\,B_H \end{aligned} \tag{4.68}$$

という関係になっている．

新しい基底で (4.63) を書き直すと，

$$*\mathcal{F}' - \mathcal{H}' = -V'\,U\,U^T\,V'^T\,\Omega'\,(\mathcal{F}' - \epsilon *\mathcal{H}') \tag{4.69}$$

となる．これに，(4.66) と (4.65) の具体的な形を代入して整理すると，

$$*G - i\,G = I + i*I - (u^T + v^T)^{-1}\,(u^T - v^T)\,(F + i*F + *H - i\,H) \tag{4.70}$$

が得られる．この式の実部から，

$$\begin{aligned} *G = I &- \mathrm{Re}\,\left[(u^T + v^T)^{-1}\,(u^T - v^T)\right]\,(F + *H) \\ &+ \mathrm{Im}\,\left[(u^T + v^T)^{-1}\,(u^T - v^T)\right]\,*\,(F + *H) \end{aligned} \tag{4.71}$$

となり，

$$K = (u^\dagger + v^\dagger)^{-1}\,(u^\dagger - v^\dagger) \tag{4.72}$$

とおくと，(4.45) の形の式が得られる．ただし，(4.72) では，複素スカラー場 u, v の中の虚数単位 i を演算子 $*$ で置き換えている．つまり，$u = \mathrm{Re}\,u + \mathrm{Im}\,u\,*$, $u^\dagger = \mathrm{Re}\,u^T - \mathrm{Im}\,u^T\,*$ などとしている．$D = 4k$ の場合，$*$ は虚数単位の性質 $i^2 = -1$ と同じく $*^2 = -1$ を満たしているので，矛盾なくこのような置き換えができる．このようにして，関数 K_{IJ} を求めることができた．u, v の G 変換と (4.68) を使って (4.72) の変換を求めると，(4.47) の形の変換になることが確かめられる．

(4.72) を表すために，変数

$$z = v^* (u^*)^{-1} = z^T \tag{4.73}$$

を導入すると便利である．$z^T = z$ は，(4.66) の条件式によって成り立つ．このzは，H 変換に対して不変であり，スカラー場の物理的な自由度を表している．G 変換に対しては，

$$z \ \rightarrow \ (a\,z + b^*)\,(b\,z + a^*)^{-1} \tag{4.74}$$

のように変換する．この z を使うと，K は

$$K = \frac{1-z}{1+z} = K^T \tag{4.75}$$

と表すことができる．この式は1つの行列 z だけしか含まず，行列を掛ける順序にはよらないので，分数の形で書いた．

$D = 4k + 2$ の場合

この場合は，(4.53) のような基底を使う．直交行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

を使って，(4.65) のように基底を変更する．この基底でのスカラー場は，実 $M \times M$ 行列に値をもつスカラー場 $u_1(x)$, $v_1(x)$, $u_2(x)$, $v_2(x)$ を使って，

$$\begin{aligned} &V'(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & v_2(x) \\ v_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}, \\ &u_1^T\,u_1 - v_1^T\,v_1 = 1, \quad u_2^T\,u_2 - v_2^T\,v_2 = 1, \quad u_1^T\,v_2 = v_1^T\,u_2 \end{aligned} \tag{4.77}$$

と表すことができる．スカラー場の変換 $V' \rightarrow g'V'h'^{-1}$ の行列は，

$$\begin{aligned} &g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a^T\,a - c^T\,c = 1,\ d^T\,d - b^T\,b = 1,\ a^T\,b = c^T\,d, \\ &h' = \begin{pmatrix} a_H & 0 \\ 0 & d_H \end{pmatrix}, \quad a_H^T\,a_H = 1,\ d_H^T\,d_H = 1 \end{aligned} \tag{4.78}$$

となる．無限小変換の場合は，前の基底での変換パラメータとの関係は，

$$\begin{aligned} &a = 1 + \frac{1}{2}\,(A + B + C + D), \quad b = \frac{1}{2}\,(A - B + C - D), \\ &d = 1 + \frac{1}{2}\,(A - B - C + D), \quad c = \frac{1}{2}\,(A + B - C - D), \\ &a_H = 1 + A_H + B_H, \quad d_H = 1 + A_H - B_H \end{aligned} \tag{4.79}$$

である．

新しい基底で (4.63) を書き直すと，(4.69) となる．これに (4.77) と (4.65) を代入すると，

$$*G - G = I - *I + (u_1 + v_1)^{-1T} (u_1 - v_1)^T (F - *F - *H + H),$$
$$*G + G = I + *I + (u_2 + v_2)^{-1T} (u_2 - v_2)^T (F + *F - *H - H) \tag{4.80}$$

が得られる．この 2 つの式の和をとると，(4.45) の形の式が得られ，K_{IJ} は，

$$K = (u_1 - v_1)(u_1 + v_1)^{-1} P_+ + (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)^{-1} P_- \tag{4.81}$$

となる．$D = 4k + 2$ の場合，演算子 $*$ は $*^2 = +1$ を満たすので，射影演算子

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm *) \tag{4.82}$$

を導入した．u_1, v_1, u_2, v_2 の G 変換と (4.79) を使って (4.81) の変換を求めると，(4.47) の形の変換になることが確かめられる．

$D = 4k$ の場合と同様に，H 不変な変数

$$z = (v_1 (u_1)^{-1})^T = v_2 (u_2)^{-1} \tag{4.83}$$

を導入すると便利である．この式の 2 番目の等号は，(4.77) の条件によって成り立つ．この z はスカラー場の物理的な自由度を表している．G 変換に対しては，

$$z \ \rightarrow \ (az + b)(cz + d)^{-1} \tag{4.84}$$

と変換する．これを使うと，K を

$$K = \frac{1 - z^T}{1 + z^T} P_+ + \frac{1 - z}{1 + z} P_- \tag{4.85}$$

と表すことができる．

4.3 $D = 4, \mathcal{N} = 8$ 超重力理論

この章でこれまで議論してきたことの応用として，4 次元の $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論について考えよう．これは，4 次元で最大の超対称性をもつ超重力理論である．この理論は，初め Cremmer と Julia[*4] によって，11 次元の超重力理論から**次元還元**（dimensional reduction）の方法を使って求められ，大局的 $E_{7(+7)}$ 対称性と局所的 $SU(8)$ 対称性をもつことが発見された．$E_{7(+7)}$ は非コンパクト群であり，$SU(8)$ はその極大コンパクト部分群である．スカラー場は $E_{7(+7)}/SU(8)$ 非線形シグマ模型で表され，$E_{7(+7)}$ はベクトル場に対して双対変換として作用する．その後 de Wit と Nicolai[*5] によって，$E_{7(+7)} \times SU(8)$ 対称性に基づいた方法で再構成された．本節の説明は，後者の方法に近い．次元還元による導出については，7.1.7 節で簡単に述べる．

*4) E. Cremmer and B. Julia, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 141.
*5) B. de Wit and H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B208** (1982) 323.

表 4.2　$D = 4, \mathcal{N} = 8$ 超重力理論の場の $E_{7(+7)}$, $SU(8)$ 変換性.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	**1**	**56**	**56**	**1**	**1**
[illegible]	**1**	**1**	$\mathbf{28} + \overline{\mathbf{28}}$	**8**	**56**

含まれている場

この理論に含まれている場は，表 3.3 のように，重力場 $e_\mu{}^a(x)$, 8 個の Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, 28 個のベクトル場 $B_\mu(x)$, 56 個の Majorana スピノール場 $\lambda(x)$, 70 個のスカラー場 $\phi(x)$ である.

$SU(8)$ 対称性を見やすい形にするには，フェルミオン場を Weyl スピノールで表すと便利である．8 個の Majorana Rarita–Schwinger 場に，負カイラリティへの射影演算子 $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ を作用してできる Weyl Rarita–Schwinger 場を，$\psi_\mu{}^i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ と書く．添字 i は，この場が $SU(8)$ の **8** 表現（基本表現）によって変換することを表している．変換の形は,

$$\delta_{SU(8)}\,\psi_\mu{}^i = -\Lambda^i{}_j\,\psi_\mu{}^j, \qquad (\Lambda^i{}_j)^* = -\Lambda^j{}_i, \quad \Lambda^i{}_i = 0 \tag{4.86}$$

である．$\psi_\mu{}^i(x)$ の荷電共役は正カイラリティをもち，$SU(8)$ の $\overline{\mathbf{8}}$ 表現によって変換するので，下に添字 i をつけて，$\psi_{\mu i}(x)$ と書く．同様に，56 個の Majorana スピノール場からつくった負カイラリティ Weyl スピノール場を $\lambda^{ijk}(x)$ とし，正カイラリティをもつその荷電共役を $\lambda_{ijk}(x)$ とする．添字 ijk は完全反対称になっていて，独立なスピノール場は ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 個ある．$\lambda^{ijk}(x)$ と $\lambda_{ijk}(x)$ は，それぞれ，$SU(8)$ の **56** 表現と $\overline{\mathbf{56}}$ 表現によって変換する.

28 個のベクトル場は，$B_\mu{}^{IJ}(x) = -B_\mu{}^{JI}(x)$ $(I, J = 1, 2, \cdots, 8)$ と表す．このベクトル場の 28 個の場の強さ $F_{\mu\nu}{}^{IJ}$ と (4.28) で定義される 28 個の $G_{\mu\nu IJ}$ を合わせたものは，$E_{7(+7)}$ の **56** 表現によって変換する．スカラー場は，$E_{7(+7)}/SU(8)$ 非線形シグマ模型で表され，$E_{7(+7)}$ の下では **56** 表現によって変換し，$SU(8)$ の下では，可約な $\mathbf{28} + \overline{\mathbf{28}}$ 表現によって変換する.

大局的 $E_{7(+7)}$ 変換と局所的 $SU(8)$ 変換に対する場の変換性を，表 4.2 にまとめた．重力場は，どちらの変換に対しても不変である．スカラー場は，両方に対して変換する．ベクトル場は，$E_{7(+7)}$ に対しては変換するが，$SU(8)$ に対しては不変である．フェルミオン場は，逆に，$SU(8)$ に対しては変換するが，$E_{7(+7)}$ に対しては不変である．4.1 節で述べたように，このような場の変換性は，スカラー場を含む一般の超重力理論に共通な特徴である.

$E_{7(+7)}/SU(8)$ 非線形シグマ模型

$E_{7(+7)}/SU(8)$ 非線形シグマ模型で表されるスカラー場についてくわしく見よう．$E_{7(+7)}$ は次元が 133 の非コンパクトな Lie 群である．(+7) は，例外群 E_7 の Lie 代数の非コンパクトな実形式のうち，Killing 形式の正固有値の個

数と負固有値の個数の差が 7 の実形式であることを表している[*6]．$E_{7(+7)}$ は $Sp(56,\mathbb{R})$ の部分群であり，その元は $Sp(56,\mathbb{R})$ の元に対して適当な条件を課したものである．この条件は，群の元よりも Lie 代数の元に対して考えたほうが見やすい．$Sp(56,\mathbb{R})$ の Lie 代数の一般的な元は，(4.66) のような複素基底では，2 つの 28×28 複素行列 Λ, Σ を使って，

$$
\begin{aligned}
&X = \begin{pmatrix} \Lambda^{IJ}{}_{KL} & \Sigma^{IJKL} \\ \Sigma_{IJKL} & \Lambda_{IJ}{}^{KL} \end{pmatrix}, \\
&\Lambda_{IJ}{}^{KL} = (\Lambda^{IJ}{}_{KL})^* = -\Lambda^{KL}{}_{IJ}, \\
&\Sigma^{IJKL} = (\Sigma_{IJKL})^* = \Sigma^{KLIJ}
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

と書ける．ここで，$I,J,K,L = 1,2,\cdots,8$ として，56×56 行列 X の行を上付き IJ と下付き IJ で，列を下付き KL と上付き KL で表した．Λ と Σ の添字 IJ, KL はそれぞれ，I と J, K と L の反対称な組である．たとえば，$\Lambda^{IJ}{}_{KL} = -\Lambda^{JI}{}_{KL} = -\Lambda^{IJ}{}_{LK}$ が成り立つ[*7]．$E_{7(+7)}$ の Lie 代数の元は，(4.87) の特別な場合で，Λ と Σ が，

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^{IJ}{}_{KL} = 4\,\delta^{[I}_{[K}\,\Lambda^{J]}{}_{L]}, \quad (\Lambda^{I}{}_{J})^* = -\Lambda^{J}{}_{I}, \quad \Lambda^{I}{}_{I} = 0, \\
&\Sigma_{IJKL} = \frac{1}{4!}\,\eta\,\epsilon_{IJKLMNPQ}\,(\Sigma_{MNPQ})^*
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

を満たす場合である．ここで，η は，$+1$, または，-1 の値をとるパラメータである．$\Lambda^{I}{}_{J}$ は $E_{7(+7)}$ の $SU(8)$ 部分 Lie 代数を表し，その独立な成分の数は 63 個である．一方，Σ_{IJKL} は $E_{7(+7)}$ の中の $SU(8)$ に直交する元を表し，その独立な成分の数は 70 個である．両方合わせると，$E_{7(+7)}$ の次元である 133 個になる．また，Killing 形式の固有値は，Λ 方向が負，Σ 方向が正になっており，正固有値と負固有値の個数の差は 7 である（$E_{7(+7)}$ の $(+7)$）．$E_{7(+7)}$ の群の元は，このような X の指数関数 e^X で表される．

スカラー場は，$E_{7(+7)}$ の元 $V(x)$ で表される．(4.66) のように $Sp(56,\mathbb{R})$ の元の形で書くと，

$$
V(x) = \begin{pmatrix} u^{IJ}{}_{ij}(x) & v^{IJij}(x) \\ v_{IJij}(x) & u_{IJ}{}^{ij}(x) \end{pmatrix}
\tag{4.90}
$$

---

*6)　くわしくは，脚注 *4) の論文と参考文献 [22] を参照せよ．

*7)　ただし，(4.87) の X のように行列の成分としてみる場合は，$I<J$, $K<L$ の独立な成分だけを並べてあると考える．したがって，行列の積の計算で現れる添字についての和は，

$$
\sum_{K<L} \Lambda^{IJ}{}_{KL}\Sigma^{KLMN} = \frac{1}{2}\sum_{K,L} \Lambda^{IJ}{}_{KL}\,\Sigma^{KLMN} \equiv \frac{1}{2}\Lambda^{IJ}{}_{KL}\,\Sigma^{KLMN} \tag{4.88}
$$

のようになり，$K<L$ の条件のない K, L の和で書いた場合は $\frac{1}{2}$ の因子が必要である．IJ, KL を添字とする単位行列は，$2\delta^{I}_{[K}\delta^{J}_{L]} = \delta^{I}_{K}\delta^{J}_{L} - \delta^{I}_{L}\delta^{J}_{K}$ で表される．$I<J$, $K<L$ の場合に限れば，これは $\delta^{I}_{K}\delta^{J}_{L}$ に等しい．

と表せる．添字は，IJ が行列の行を，ij が列を表している．ただし，u, v は，$Sp(56,\mathbb{R})$ の条件

$$
\begin{aligned}
&u_{IJ}{}^{ij} = (u^{IJ}{}_{ij})^*, \quad v^{IJij} = (v_{IJij})^*, \\
&\frac{1}{2}\left(u_{IJ}{}^{ij}\, u^{IJ}{}_{kl} - v^{IJij}\, v_{IJkl}\right) = 2\,\delta^i_{[k}\,\delta^j_{l]}, \\
&u^{IJ}{}_{ij}\, v_{IJkl} = v_{IJij}\, u^{IJ}{}_{kl},
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

および，(4.89) に相当する $E_{7(+7)}$ の条件を満たすとする．条件 (4.91) を使うと，逆行列が

$$
V(x)^{-1} = \begin{pmatrix} u_{IJ}{}^{ij}(x) & -v^{IJij}(x) \\ -v_{IJij}(x) & u^{IJ}{}_{ij}(x) \end{pmatrix}
\tag{4.92}
$$

と書けることがわかる．この逆行列の添字は，ij が行を，IJ が列を表している．

ラグランジアンや超変換を構成するためには，スカラー場の微分が必要である．(4.5) にしたがって，スカラー場の微分から

$$
\begin{aligned}
&V^{-1}\,\partial_\mu V = \begin{pmatrix} 4\,\delta^{[i}{}_{[k}\,Q_\mu{}^{j]}{}_{l]} & P_\mu{}^{ijkl} \\ P_{\mu ijkl} & 4\,\delta_{[i}{}^{[k}\,Q_{\mu j}{}^{l]} \end{pmatrix}, \\
&Q_{\mu i}{}^j = (Q_\mu{}^i{}_j)^*, \qquad P_\mu{}^{ijkl} = (P_{\mu ijkl})^*
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

のように $P_\mu{}^{ijkl}$ と $Q_\mu{}^i{}_j$ を定義する．この行列は，$E_{7(+7)}$ の Lie 代数の元の形 (4.87), (4.89) をしているとした．$Q_\mu{}^i{}_j$ は，$SU(8)$ 部分代数に値をもち，局所 $SU(8)$ 変換に対してゲージ場としての変換をする．$P_{\mu ijkl}$ は，$E_{7(+7)}$ の中の $SU(8)$ に直交する空間に値をもち，$SU(8)$ 変換に対して共変的に変換する．また，$V^{-1}\partial_\mu V$ が $E_{7(+7)}$ 代数の元であることから，(4.89) と同様に，

$$
P_\mu{}^{ijkl} = \frac{1}{4!}\,\eta\,\epsilon^{ijklmnpq}\,P_{\mu mnpq}
\tag{4.94}
$$

が成り立つ．$P_{\mu ijkl}$, $Q_\mu{}^i{}_j$ を V の成分で具体的に表すと，

$$
\begin{aligned}
P_{\mu ijkl} &= \frac{1}{2}\left(u^{IJ}{}_{ij}\,\partial_\mu\, v_{IJkl} - v_{IJij}\,\partial_\mu\, u^{IJ}{}_{kl}\right), \\
Q_\mu{}^i{}_j &= \frac{1}{12}\left(u_{IJ}{}^{ik}\,\partial_\mu\, u^{IJ}{}_{jk} - v^{IJik}\,\partial_\mu\, v_{IJjk}\right)
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

となる．(4.93) の左辺を微分すると，**Maurer–Cartan 方程式**

$$
\partial_{[\mu}\left(V^{-1}\,\partial_{\nu]}\,V\right) = -V^{-1}\,\partial_{[\mu}\,V\,V^{-1}\,\partial_{\nu]}\,V
\tag{4.96}
$$

が成り立つことがわかる．この式の両辺に (4.93) を代入すると，

$$
F_{\mu\nu}{}^i{}_j(Q) + \frac{1}{6}\,P_{[\mu}{}^{iklm}\,P_{\nu]jklm} = 0, \qquad D_{[\mu}\,P_{\nu]ijkl} = 0
\tag{4.97}
$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(Q) &= \partial_\mu Q_\nu - \partial_\nu Q_\mu + [Q_\mu, Q_\nu], \\
D_\mu P_{\nu ijkl} &= \partial_\mu P_{\nu ijkl} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} P_{\rho ijkl} - 4 P_{\nu m[jkl} Q_\mu{}^m{}_{i]}
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

は，$SU(8)$ ゲージ場からつくった場の強さと共変微分である．(4.97) は，作用の局所超変換に対する不変性を示すときに必要である．

ラグランジアン

この理論のラグランジアンは，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = e\,R &- \frac{1}{24} e\, P_{\mu ijkl} P^{\mu ijkl} - e\,\bar{\psi}_{\mu i} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho{}^i - \frac{1}{6} e\,\bar{\lambda}_{ijk} \gamma^\mu D_\mu \lambda^{ijk} \\
&+ \frac{1}{6\sqrt{2}} e \left(\bar{\psi}_{\mu i} \gamma^\nu \gamma^\mu \lambda_{jkl} P_\nu{}^{ijkl} + \bar{\lambda}^{jkl} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\mu{}^i P_{\nu ijkl} \right) \\
&- \frac{1}{16} e\, F_{\mu\nu}{}^{IJ} K_{IJ,KL} F^{\mu\nu KL} \\
&- \frac{1}{8} e\, F_{\mu\nu}{}^{IJ} \left(N_+{}^{IJ}{}_{ij} H_+{}^{\mu\nu ij} + N_{-IJ}{}^{ij} H_-{}^{\mu\nu}{}_{ij} \right) + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.99}
$$

で与えられる．最後の "$\cdots$" は，フェルミオン場について 4 次の項を表す．第 2 項はスカラー場の運動項で，上で定義した $P_{\mu ijkl}$ を使った (4.8) の形をしている．第 3 項と第 4 項はフェルミオン場の運動項である．フェルミオン場に対する共変微分は，スピン接続 $\omega_{\mu ab}$ の他に，$SU(8)$ ゲージ場 $Q_\mu{}^i{}_j$ を含み，

$$
\begin{aligned}
D_{[\mu} \psi_{\nu]}{}^i &= \left(\partial_{[\mu} + \frac{1}{4} \omega_{[\mu}{}^{ab} \gamma_{ab} \right) \psi_{\nu]}{}^i + Q_{[\mu}{}^i{}_j \psi_{\nu]}{}^j, \\
D_\mu \lambda^{ijk} &= \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \right) \lambda^{ijk} + 3 Q_\mu{}^{[k}{}_l \lambda^{ij]l}
\end{aligned}
\tag{4.100}
$$

と定義されている．ベクトル場 $B_\mu{}^{IJ}$ とのミニマル結合はない．第 5 項は，(4.10) の形のフェルミオン場の双 1 次形式とスカラー場の微分との結合を表す．残りの 2 つの項は，ベクトル場を含む項である．ベクトル場の運動項に現れる $K_{IJ,KL}$ は，まず (4.72) のように，

$$
K_{IJ,KL} = [(u^\dagger + v^\dagger)^{-1} (u^\dagger - v^\dagger)]_{IJ,KL} \tag{4.101}
$$

とおき，その中の虚数単位 i を Hodge 双対演算子 $*$ に置き換えたもので定義される．最後の項は，フェルミオン場の双 1 次形式とベクトル場の場の強さの積の形をした Pauli 項である．そこに現れる量は，スカラー場とフェルミオン場を使って，

$$
\begin{aligned}
N_+{}^{IJ}{}_{ij} &= [(u^\dagger + v^\dagger)^{-1}]^{IJ}{}_{ij}, \\
H_{+\mu\nu}{}^{ij} &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_\rho{}^i \gamma^{[\rho} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\sigma]} \psi_\sigma{}^j + \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\rho k} \gamma_{\mu\nu} \gamma^\rho \lambda^{ijk} \\
&\quad - \frac{1}{144} \eta\, \epsilon^{ijklmnpq} \bar{\lambda}_{klm} \gamma_{\mu\nu} \lambda_{npq}, \\
N_{-IJ}{}^{ij} &= (N_+{}^{IJ}{}_{ij})^*, \qquad H_{-\mu\nu ij} = (H_{+\mu\nu}{}^{ij})^*
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

と定義される．フェルミオン場が Weyl スピノールであることとガンマ行列の公式 $e^{-1}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma} = 2i\gamma^{\mu\nu}\gamma_5$ を使うと，$H_\pm$ は，

$$*H_\pm = \pm i\, H_+ \tag{4.103}$$

を満たすことがわかる．

このラグランジアンは，双対対称性から決まる (4.48) の形をしていることが次のように確かめられる．したがって，場の方程式は $E_{7(+7)}$ 変換に対して不変である．まず，(4.99) の初めの 2 行は明白に $E_{7(+7)}$ 不変であり，(4.48) の $\mathcal{L}_{\rm inv}$ に対応する．(4.99) のベクトル場の運動項は，K として (4.72) を使った (4.48) の第 1 項そのものである．Pauli 項の対応を見るには，(4.48) にある (H^{IJ}, I_{IJ}) と $H_\pm$ の関係を

$$\begin{pmatrix} H + i\,I \\ H - i\,I \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} i\,H_+ \\ -i\,H_- \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

とする．この (H^{IJ}, I_{IJ}) は $SU(8)$ 不変であり，$E_{7(+7)}$ に対して (F^{IJ}, G_{IJ}) と同じ形の変換をすることがわかる．これから (4.48) にある組み合わせをつくり，(4.103) を使うと，

$$I_{IJ} - \frac{1}{2}\,K_{IJ,KL} *H^{KL} = -\frac{1}{2}\left(N_+{}^{IJ}{}_{ij}\,H_+{}^{ij} + N_{-IJ}^{ij}\,H_{-ij}\right) \tag{4.105}$$

となり，(4.99) の最後の項の形になっていることがわかる．(4.105) を導く際には，(4.102) の N_+ が，

$$N_+ = \frac{1}{2}\left[(u - v) + \bar{K}\,(u + v)\right]$$

と表せることを使った．ここで，$\bar{K}$ は (4.101) で虚数単位 i を Hodge 双対演算子 $*$ に置き換える前の量である．この式は，右辺に $(u^\dagger + v^\dagger)$ を掛けると単位行列になることから確かめられる．(4.48) の中の $*H(I - K{*}H)$ の項は，フェルミオン場について 4 次なので，(4.99) の "$\cdots$" の中に含まれる．

局所対称性

この理論は，大局的 $E_{7(+7)}$ 対称性の他に，いろいろな局所対称性をもっている．ラグランジアン (4.99) からつくった作用は，一般座標変換 δ_G, 局所 Lorentz 変換 δ_L, ベクトル場の $U(1)^{28}$（28 個の $U(1)$ の直積）ゲージ変換 δ_g, 局所 $SU(8)$ 変換 $\delta_{SU(8)}$, および，局所超変換 δ_Q に対して不変である．局所超変換は，

$$\delta_Q\, e_\mu{}^a = \frac{1}{4}\left(\bar{\epsilon}_i\,\gamma^a\,\psi_\mu{}^i + \bar{\epsilon}^i\,\gamma^a\,\psi_{\mu i}\right),$$

$$\delta_Q\,\psi_\mu{}^i = D_\mu\,\epsilon^i + \frac{1}{16}\,\gamma^{\rho\sigma}\,\gamma_\mu\,F_{\rho\sigma}{}^{IJ}\,N_{-IJ}{}^{ij}\,\epsilon_j + \cdots, \tag{4.106}$$

$$\delta_Q B_\mu{}^{IJ} = -\frac{1}{2}\left(u^{IJ}{}_{ij} + v_{IJij}\right)\left(\bar{\epsilon}^i \psi_\mu{}^j - \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\epsilon}_k \gamma_\mu \lambda^{ijk}\right) + \text{c.c.},$$

$$\delta_Q \lambda^{ijk} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \epsilon_l P_\mu{}^{ijkl} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}{}^{IJ} N_{-IJ}{}^{[ij}\epsilon^{k]} + \cdots,$$

$$V^{-1}\delta_Q V = \begin{pmatrix} 0 & (W_{ijkl})^* \\ W_{ijkl} & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで，c.c. は複素共役を表す．また，フェルミオン場の変換の "$\cdots$" は，フェルミオン場について 2 次の項を表す．変換のパラメータ ϵ^i は負カイラリティ Weyl スピノールであり，ϵ_i はその荷電共役の正カイラリティ Weyl スピノールである．また，W_{ijkl} は，

$$W_{ijkl} = \sqrt{2}\left(\bar{\epsilon}_{[i}\lambda_{jkl]} + \frac{1}{4!}\eta\,\epsilon_{ijklmnpq}\bar{\epsilon}^m \lambda^{npq}\right) \tag{4.107}$$

で与えられる．2 つの局所超変換の交換関係は，場の方程式を使うと，

$$[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_{SU(8)}(\Lambda) + \delta_Q(\epsilon) \tag{4.108}$$

のように局所変換の和の形で表され，局所変換は交換関係について閉じた代数をつくっている．交換関係の右辺に現れる各変換のパラメータは，

$$\begin{aligned}
\xi^\mu &= \frac{1}{4}\left(\bar{\epsilon}_{2i}\gamma^\mu \epsilon_1^i + \bar{\epsilon}_2^i \gamma^\mu \epsilon_{1i}\right), \\
\lambda_{ab} &= -\xi^\mu \omega_{\mu ab} - \frac{1}{64}\left(\bar{\epsilon}_{2i}\gamma_{[a}\gamma^{\mu\nu}\gamma_{b]}\epsilon_{1j} F_{\mu\nu}{}^{IJ} N_{-IJ}{}^{ij} + \text{c.c.}\right), \\
\zeta^{IJ} &= -\xi^\mu B_\mu{}^{IJ} - \frac{1}{2}\left[\left(u^{IJ}{}_{ij} + v_{IJij}\right)\bar{\epsilon}_2^i \epsilon_1^j + \text{c.c.}\right], \\
\Lambda^i{}_j &= -\xi^\mu Q_\mu{}^i{}_j
\end{aligned} \tag{4.109}$$

となる．

第 5 章
高次元の超重力理論

高次元の超重力理論のラグランジアン（または，場の方程式）と対称性について述べる．特に，M 理論や超弦理論の低エネルギー有効理論である 11 次元と 10 次元の超重力理論についてくわしく議論する．

5.1 一般的な構造

高次元の時空では，表 3.3 に上げた超対称性をもつ超重力理論が存在し，そのラグランジアン（または，場の方程式）と場の局所超変換が具体的に求められている*1)．これらは，Minkowski 時空を場の方程式の解としてもつ理論で，**Poincaré 超重力理論**とよばれる．これらの超重力理論の一般的な構造は，次のようになっている．含まれている場は，重力場，Rarita–Schwinger 場，反対称テンソル場，ベクトル場，スピノール場，スカラー場である．局所対称性として，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ベクトル場と反対称テンソル場のゲージ変換，局所超変換に対する対称性をもつ．また，表 4.1 に上げた大局的対称性をもつ．スカラー場を含んでいる場合は，大局的対称性は非コンパクトな群 G で表され，スカラー場は G をその極大コンパクト部分群 H で割った商空間 G/H に値をもつ非線形シグマ模型で記述される．4.1 節で述べたように，G/H 非線形シグマ模型を大局的 G 対称性と局所的 H 対称性をもった理論として定式化することができる．重力場とスカラー場以外のボソン場は G に対してだけ変換し，フェルミオン場は H に対してだけ変換する．重力場はどちらに対しても不変で，スカラー場は両方に対して変換する．偶数次元 $(D = 2n)$ では，G は $n-1$ 階の反対称テンソル場 $B_{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}$ に双対変換として作用する場合がある．この場合，G は場の方程式の対称性であり，作用の対称性ではない．

高次元のいろいろな超重力理論は，次元還元とトランケーションによって関

*1)　くわしい文献については，参考文献 [11] を参照せよ．

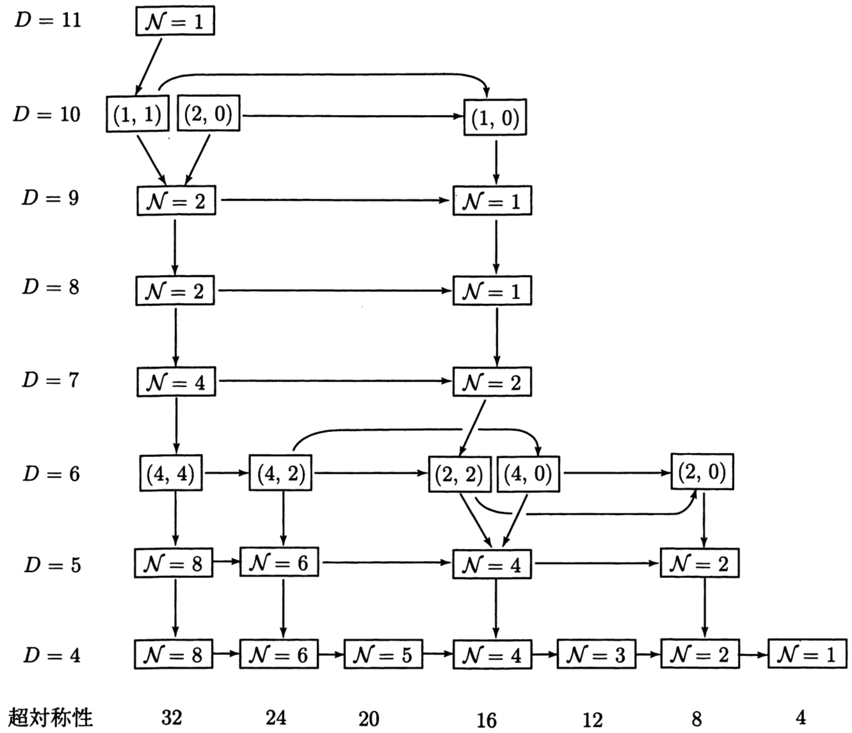


図 5.1　高次元の超重力理論.

係がついている．これを，図 5.1 に示した．この図では，横方向の矢印はトランケーションを表している．また，縦方向の矢印は，第 6 章，第 7 章で議論する次元還元による関係を表している．最後の行の数字は，超対称性の個数（変換パラメータ ϵ の独立な実成分の個数）である．極大超重力理論（32 個の超対称性をもつ理論）の場合以外は，次元還元を行うと，物質超多重項に結合した理論が得られる．

以下では，M 理論と超弦理論の低エネルギー有効理論である 11 次元と 10 次元の超重力理論についてくわしく述べる．11 次元では，M 理論の有効理論である $\mathcal{N}=1$ 超重力理論が存在する．10 次元では，$\mathcal{N}=(1,1)$, $(2,0)$, $(1,0)$ の 3 種類の超重力理論が存在する．これらは，それぞれ，IIA 型超弦理論，IIB 型超弦理論，I 型超弦理論およびヘテロ型弦理論の有効理論である．

5.2　$D=11, \mathcal{N}=1$ 超重力理論

最も高い次元で構成されている超重力理論は，$D=11, \mathcal{N}=1$ 理論*2) である．この理論は，M 理論の低エネルギー有効理論である．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a(x)$, 1 個の Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, 3 階の実反対称

*2)　E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Phys. Lett.* **B76** (1978) 409.

テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}(x)$ である．スカラー場を含まないため，ラグランジアンや局所超変換は，比較的簡単な形をしている．ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & e\,R(\omega) - \frac{1}{48}\,e\,F_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\left(\tfrac{\omega+\hat{\omega}}{2}\right)\,\psi_\rho \\ & - \frac{1}{144^2}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}\,F_{\mu_1\cdots\mu_4}\,F_{\mu_5\cdots\mu_8}\,B_{\mu_9\mu_{10}\mu_{11}} \\ & + \frac{1}{384}\,e\,\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau\lambda}\,\gamma^\nu\,\psi_{\nu]}\,(F_{\rho\sigma\tau\lambda} + \hat{F}_{\rho\sigma\tau\lambda})\end{aligned} \tag{5.1}$$

である．ここで，$R(\omega)$ と $D_\mu(\omega)$ は，スピン接続 $\omega_{\mu ab}$ を使ったスカラー曲率と共変微分を表す．また，捩率をもたないスピン接続 $\omega^{(0)}_{\mu ab}$ を使って，

$$\begin{aligned}\omega_{\mu ab} &= \omega^{(0)}_{\mu ab} + \frac{1}{8}\,(\bar{\psi}_\mu\,\gamma_a\,\psi_b - \bar{\psi}_\mu\,\gamma_b\,\psi_a + \bar{\psi}_a\,\gamma_\mu\,\psi_b) + \frac{1}{16}\bar{\psi}_\rho\,\gamma_{\mu ab}{}^{\rho\sigma}\,\psi_\sigma, \\ \hat{\omega}_{\mu ab} &= \omega_{\mu ab} - \frac{1}{16}\,\bar{\psi}_\rho\,\gamma_{\mu ab}{}^{\rho\sigma}\,\psi_\sigma, \\ F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho\sigma]}, \\ \hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma} &= F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{3}{2}\,\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma_{\nu\rho}\,\psi_{\sigma]}\end{aligned} \tag{5.2}$$

を定義した．$\hat{\omega}_{\mu ab}$ と $\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma}$ は，局所超変換が変換のパラメータの微分 $\partial_\mu\epsilon$ を含まない超共変な量である．$\omega_{\mu ab}$ を使った共変微分は，捩率

$$D_\mu(\omega)\,e_\nu{}^a - D_\nu(\omega)\,e_\mu{}^a = \frac{1}{4}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^a\,\psi_\nu - \frac{1}{8}\,\bar{\psi}_\rho\,\gamma_{\mu\nu}{}^{a\rho\sigma}\,\psi_\sigma \tag{5.3}$$

をもつ．このラグランジアンからつくった作用 S を，$e_\mu{}^a$, ψ_μ, $B_{\mu\nu\rho}$, $\omega_{\mu ab}$ の汎関数とみなすと，$\frac{\delta S}{\delta\omega_{\mu ab}} = 0$ が成り立つ．

このラグランジアンは，一般座標変換 δ_G と局所 Lorentz 変換 δ_L の他に，反対称テンソル場のゲージ変換

$$\delta_g\,e_\mu{}^a = 0, \quad \delta_g\,B_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu\rho]}, \quad \delta_g\,\psi_\mu = 0 \tag{5.4}$$

に対して不変である．また，Majorana スピノール $\epsilon(x)$ を変換パラメータとする局所超変換

$$\begin{aligned}\delta_Q\,e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}\,\gamma^a\,\psi_\mu, \\ \delta_Q\,B_{\mu\nu\rho} &= \frac{3}{4}\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{[\mu\nu}\,\psi_{\rho]}, \\ \delta_Q\,\psi_\mu &= D_\mu(\hat{\omega})\,\epsilon - \frac{1}{288}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma\tau} - 8\,\delta^\nu_\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\right)\epsilon\,\hat{F}_{\nu\rho\sigma\tau}\end{aligned} \tag{5.5}$$

に対しても不変である．2 つの局所超変換の交換関係は，

$$[\delta_Q(\epsilon_1),\,\delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_Q(\epsilon) \tag{5.6}$$

のように，局所変換の和の形になる．ここで，右辺に現れる変換のパラメータは，

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma^\mu\,\epsilon_1, \\ \lambda_{ab} &= -\xi^\mu\,\hat{\omega}_{\mu ab} + \frac{1}{24}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma^{\rho\sigma}\,\epsilon_1\,\hat{F}_{ab\rho\sigma} + \frac{1}{576}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma_{ab}{}^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_1\,\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma},\end{aligned}$$

$$\zeta_{\mu\nu} = -\xi^\rho B_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2 \gamma_{\mu\nu} \epsilon_1, \tag{5.7}$$
$$\epsilon = -\xi^\mu \psi_\mu$$

で与えられる．交換関係 (5.6) を導くときには，Rarita–Schwinger 場の方程式を使う必要がある．この理論の場の方程式は，11 次元の Minkowski 時空解 ${e_\mu}^a = \delta^a_\mu$, $B_{\mu\nu\rho} = 0$, $\psi_\mu = 0$ をもつ．この解を背景場として上の交換関係を考えると，$D = 11$, $\mathcal{N} = 1$ 超 Poincaré 代数を表していることがわかる．交換関係の右辺に現れる反対称テンソル場のゲージ変換 $\zeta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma_{\mu\nu}\epsilon_1$ は，3.2 節の最後で述べた反対称テンソルの中心電荷を表している．下で述べる 10 次元の超重力理論についても，局所超変換の交換関係に同様な項が現れる．

5.3 $D = 10, \mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論

10 次元の $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論*3) は，IIA 型超弦理論の低エネルギー有効理論である．この理論は，カイラリティに関して正負対称なベクトル型の理論であり，7.1.1 節で述べるように，11 次元の超重力理論から次元還元によって求めることができる．含まれている場は，重力場 ${e_\mu}^a(x)$, 実反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}(x)$，$B_{\mu\nu}(x)$, 実ベクトル場 $B_\mu(x)$, 実スカラー場 $\phi(x)$, Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, Majorana スピノール場 $\lambda(x)$ である．Majorana スピノールで表されるフェルミオン場は，正と負のカイラリティをもつ 2 つの Majorana–Weyl スピノールで表すこともできる．

ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {}& e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\,e\,e^{\frac{3}{2}\phi}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} - \frac{1}{12}\,e\,e^{-\phi}\,F_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho} \\
& -\frac{1}{48}\,e\,e^{\frac{1}{2}\phi}\,F_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{144}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,\partial_{\mu_1}B_{\mu_2\mu_3\mu_4}\,\partial_{\mu_5}B_{\mu_6\mu_7\mu_8}\,B_{\mu_9\mu_{10}} \\
& -\frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\psi_\rho - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\lambda}\,\gamma^\mu\,D_\mu\,\lambda - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\lambda\,\partial_\nu\phi \\
& -\frac{1}{16}\,e\,e^{\frac{3}{4}\phi}\left(\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma}\,\gamma^\nu\,\bar{\gamma}\,\psi_{\nu]} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma}\,\gamma^\mu\,\bar{\gamma}\,\lambda + \frac{5}{4}\bar{\lambda}\,\gamma^{\rho\sigma}\,\bar{\gamma}\,\lambda\right)F_{\rho\sigma} \\
& +\frac{1}{48}\,e\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\left(\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\nu\,\bar{\gamma}\,\psi_{\nu]} + \sqrt{2}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\mu\,\bar{\gamma}\,\lambda\right)F_{\rho\sigma\tau} \\
& +\frac{1}{192}\,e\,e^{\frac{1}{4}\phi}\left(\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau\lambda}\,\gamma^\nu\,\psi_{\nu]} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau\lambda}\,\gamma^\mu\,\lambda\right. \\
& \left. +\frac{3}{4}\,\bar{\lambda}\,\gamma^{\rho\sigma\tau\lambda}\,\lambda\right)F_{\rho\sigma\tau\lambda} + \cdots
\end{aligned} \tag{5.8}$$

である．フェルミオン場について 4 次の項を "$\cdots$" で表し，省略した．ベクト

*3) M. Huq and M.A. Namazie, *Class. Quant. Grav.* **2** (1985) 293 [*Erratum-ibid.* **2** (1985) 597]; F. Giani and M. Pernici, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 325; I.C.G. Campbell and P.C. West, *Nucl. Phys.* **B243** (1984) 112.

表 5.1　$D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論の $GL(1,\mathbb{R})^+$ ウェイト.

[redacted]							
[redacted]	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0

ル場と反対称テンソル場の場の強さは,

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= 2\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu]}, \\
F_{\mu\nu\rho} &= 3\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho]}, \\
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho\sigma]} + 4\,B_{[\mu}\,F_{\nu\rho\sigma]}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

で与えられる．フェルミオン場に対する共変微分 D_μ は，ゲージ場としてはスピン接続だけを含んでいる．$\bar{\gamma}$ は，(3.12) のカイラリティ行列である．

ラグランジアン (5.8) は，大局的な $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換 $\Phi(x) \to e^{w\Lambda}\Phi(x)$ に対して不変である．それぞれの場のウェイト w を表 5.1 に与えた．ラグランジアン (5.8) からつくった作用は，一般座標変換 $\delta_G(\xi)$，局所 Lorentz 変換 $\delta_L(\lambda)$，ベクトル場と反対称テンソル場のゲージ変換 $\delta_g(\zeta)$，局所超変換 $\delta_Q(\epsilon)$ に対して不変である．ゲージ変換は，3 種類の変換パラメータ ζ, ζ_μ, $\zeta_{\mu\nu}$ をもち，ゼロでない変換は，

$$
\begin{aligned}
\delta_g\,B_\mu &= \partial_\mu\,\zeta, \\
\delta_g\,B_{\mu\nu} &= 2\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu]}, \\
\delta_g\,B_{\mu\nu\rho} &= 3\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu\rho]} + 3\,B_{[\mu\nu}\,\partial_{\rho]}\,\zeta
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

である．場の強さ (5.9) は，このゲージ変換に対して不変である．$\delta_g B_{\mu\nu\rho}$ の第 2 項は，$F_{\mu\nu\rho\sigma}$ が $4B_{[\mu}F_{\nu\rho\sigma]}$ の項を含むため必要である．局所超変換は，$\epsilon(x)$ を Majorana スピノールの変換パラメータとして，

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\,e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}\,\gamma^a\,\psi_\mu, \\
\delta_Q\,\phi &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\bar{\epsilon}\,\lambda, \\
\delta_Q\,B_\mu &= -\frac{1}{4}\,e^{-\frac{3}{4}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\bar{\gamma}\,\psi_\mu + \frac{3}{8\sqrt{2}}\,e^{-\frac{3}{4}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\gamma_\mu\,\bar{\gamma}\,\lambda, \\
\delta_Q\,B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\bar{\gamma}\,\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{\frac{1}{2}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{\mu\nu}\,\bar{\gamma}\,\lambda, \\
\delta_Q\,B_{\mu\nu\rho} &= \frac{3}{4}\,e^{-\frac{1}{4}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{[\mu\nu}\psi_{\rho]} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{4}\phi}\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{\mu\nu\rho}\,\lambda + 3\,B_{[\mu}\,\delta_Q\,B_{\nu\rho]}, \\
\delta_Q\,\psi_\mu &= D_\mu\,\epsilon + \frac{1}{64}\,e^{\frac{3}{4}\phi}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho} - 14\,\delta_\mu^\nu\,\gamma^\rho\right)\bar{\gamma}\,\epsilon\,F_{\nu\rho} \\
&\quad + \frac{1}{96}\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma} - 9\,\delta_\mu^\nu\,\gamma^{\rho\sigma}\right)\bar{\gamma}\,\epsilon\,F_{\nu\rho\sigma} \\
&\quad - \frac{1}{768}\,e^{\frac{1}{4}\phi}\left(3\,\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma\tau} - 20\,\delta_\mu^\nu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\right)\epsilon\,F_{\nu\rho\sigma\tau} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

$$\delta_Q \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \phi - \frac{3}{16\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\phi} \gamma^{\mu\nu} \bar{\gamma} \epsilon F_{\mu\nu}$$
$$+ \frac{1}{24\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\phi} \gamma^{\mu\nu\rho} \bar{\gamma} \epsilon F_{\mu\nu\rho}$$
$$+ \frac{1}{192\sqrt{2}} e^{\frac{1}{4}\phi} \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon F_{\mu\nu\rho\sigma} + \cdots$$

で与えられる．フェルミオン場について高次の項を "$\cdots$" で表し，省略した．局所超変換の交換関係は，フェルミオン場の方程式を使うと，

$$[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_Q(\epsilon) \tag{5.12}$$

のように局所変換の和の形になる．右辺に現れる変換パラメータは，

$$\xi^\mu = \frac{1}{4} \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1,$$
$$\lambda_{ab} = -\xi^\mu \omega_{\mu ab} - \frac{1}{128} e^{\frac{3}{4}\phi} \bar{\epsilon}_2 (\gamma_{ab}{}^{\mu\nu} + 14\, e_a{}^\mu e_b{}^\nu) \bar{\gamma} \epsilon_1 F_{\mu\nu},$$
$$- \frac{1}{192} e^{-\frac{1}{2}\phi} \bar{\epsilon}_2 (\gamma_{ab}{}^{\mu\nu\rho} + 18\, e_a{}^\mu e_b{}^\nu \gamma^\rho) \bar{\gamma} \epsilon_1 F_{\mu\nu\rho}$$
$$+ \frac{1}{512} e^{\frac{1}{4}\phi} \bar{\epsilon}_2 (\gamma_{ab}{}^{\mu\nu\rho\sigma} + 20\, e_a{}^\mu e_b{}^\nu \gamma^{\rho\sigma}) \epsilon_1 F_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{5.13}$$
$$\zeta = -\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}\phi} \bar{\epsilon}_2 \bar{\gamma} \epsilon_1 - \xi^\mu B_\mu,$$
$$\zeta_\mu = -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}\phi} \bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \bar{\gamma} \epsilon_1 - \xi^\nu B_{\nu\mu},$$
$$\zeta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}\phi} \bar{\epsilon}_2 \gamma_{\mu\nu} \epsilon_1 - \xi^\rho B_{\rho\mu\nu} - \zeta B_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\phi} \bar{\epsilon}_2 \gamma_{[\mu} \bar{\gamma} \epsilon_1 B_{\nu]}$$

である．超変換のパラメータ ϵ を求めるには，(5.12) のフェルミオン場について高次の項が必要であるため，省略する．

ストリングフレーム

$D = 10$, $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論は，IIA 型超弦理論の低エネルギー有効理論である．しかし，通常，超弦理論の有効理論として使われるラグランジアンは，(5.8) ではなく，

$$\mathcal{L} = e\, e^{-2\phi} \left[R + 4\, \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{1}{12} F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} \right] - \frac{1}{48} e\, F_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}$$
$$- \frac{1}{4} e\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{144} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{10}} \partial_{\mu_1} B_{\mu_2\mu_3\mu_4} \partial_{\mu_5} B_{\mu_6\mu_7\mu_8} B_{\mu_9\mu_{10}} + \cdots \tag{5.14}$$

という形をしている．"$\cdots$" は，フェルミオン場を含む項を表す．このラグランジアンの特徴は，Einstein 項にスカラー場の因子 $e^{-2\phi}$ があることである．また，超弦理論の NS-NS セクターの場 $e_\mu{}^a$, ϕ, $B_{\mu\nu}$ だけを含む項には $e^{-2\phi}$ が掛かっているが，R-R セクターの場 B_μ, $B_{\mu\nu\rho}$ を含む項にはそれがない．超弦理論では，スカラー場 ϕ を**ディラトン場** (dilaton field) とよび，e^ϕ の背景場に対する値は相互作用の強さを決める結合定数を表す．

(5.8) と (5.14) は，重力場の変数変換によって結びついている．(5.8) で，重力場を

$$e_\mu{}^a \ \rightarrow \ e^{-\frac{1}{4}\phi}\, e_\mu{}^a \tag{5.15}$$

のように Weyl 変換の形に置き換え，公式 (1.30) を使うと，(5.14) が得られる．通常の Einstein 項を含む (5.8) の重力場の選び方を **Einstein フレーム**，(5.14) の重力場の選び方を**ストリングフレーム**とよぶ．フェルミオン場を含む項については，(5.15) と同時に

$$\psi_\mu \ \rightarrow \ e^{\frac{3}{8}\phi}\, \psi_\mu, \qquad \lambda \ \rightarrow \ e^{\frac{5}{8}\phi}\, \lambda \tag{5.16}$$

と置き換えると，R-R セクターの場を含む項にはディラトン場の因子がなく，それ以外の項には $e^{-\phi}$ が掛かっている形になる．

5.4 $D = 10,\ \mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論

$\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論*4) は，IIB 型超弦理論の低エネルギー有効理論である．この理論は，カイラリティに関して正負非対称なカイラルな理論である．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a(x)$, 正カイラリティの Weyl Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, 4 階の実反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$, 2 階の複素反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}(x)$, 負カイラリティの Weyl スピノール場 $\lambda(x)$, 複素スカラー場 $\tau(x)$ である．Weyl スピノールで表されるフェルミオン場は，同じカイラリティをもつ 2 つの Majorana–Weyl スピノールで表すこともできる．4 階の反対称テンソル場の場の強さは**自己双対性条件**を満たす．このため，この理論に対する簡単な形の共変的なラグランジアンは知られていない（1.6.2 節参照）．しかし，共変的な場の方程式は具体的に求められている．場の方程式は，一般座標変換や局所超変換などの局所変換に対する対称性の他に，大局的な非コンパクト対称性 $SU(1,1)$ をもっている．

$SU(1,1)/U(1)$ 非線形シグマ模型

スカラー場は $SU(1,1)/U(1)$ 非線形シグマ模型によって記述される．4.1 節の一般論に従って，スカラー場を $SU(1,1)$ 行列

$$V(x) = \begin{pmatrix} V^1{}_-(x) & V^1{}_+(x) \\ V^2{}_-(x) & V^2{}_+(x) \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

で表す．各成分 $V^\alpha{}_\pm(x)$ $(\alpha = 1,2)$ は複素スカラー場で，$V(x)$ が $SU(1,1)$ 行列であるための条件 (A.13) は，

*4) J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 269; P.S. Howe and P.C. West, *Nucl. Phys.* **B238** (1984) 181.

$$\epsilon_{\alpha\beta} V^{\alpha}{}_{-} V^{\beta}{}_{+} = 1, \qquad (V^1{}_{\pm})^* = V^2{}_{\mp} \tag{5.18}$$

と書ける．ここで，$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$, $\epsilon_{12} = +1$ である．行列に値をもつスカラー場 $V(x)$ は，大局的 $G = SU(1,1)$ 変換 g と局所的 $H = U(1)$ 変換 $h(x)$ に対して，(4.1), (4.2) のように変換する．行列 g と $h(x)$ の具体的な形は，複素数 u, v と実関数 $\Sigma(x)$ を使って，

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \qquad \left(|u|^2 - |v|^2 = 1\right), \\ h(x) &= \begin{pmatrix} e^{i\Sigma(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\Sigma(x)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.19}$$

と書ける．

(4.5) にしたがって，$SU(1,1)$ Lie 代数に値をもつ $V^{-1}\partial_\mu V$ を，

$$V^{-1}\partial_\mu V = \begin{pmatrix} -i\,Q_\mu & 0 \\ 0 & i\,Q_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ P_\mu^* & 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

のように $U(1)$ 部分 Lie 代数の項とそれに直交する項に分けると，

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\epsilon_{\alpha\beta} V^{\alpha}{}_{+} \partial_\mu V^{\beta}{}_{+}, \\ Q_\mu &= -i\,\epsilon_{\alpha\beta} V^{\alpha}{}_{-}\, \partial_\mu V^{\beta}{}_{+} \end{aligned} \tag{5.21}$$

となる．P_μ と Q_μ は，大局的 $SU(1,1)$ 変換に対しては不変であり，局所的 $U(1)$ 変換に対しては

$$P_\mu \;\rightarrow\; e^{2i\Sigma} P_\mu, \qquad Q_\mu \;\rightarrow\; Q_\mu + \partial_\mu \Sigma \tag{5.22}$$

のように変換する．P_μ が $U(1)$ チャージ 2 をもち，Q_μ が $U(1)$ ゲージ場の変換をすることがわかる．Q_μ を使って $U(1)$ 共変微分を定義することができる．$U(1)$ 変換に対して $\Phi \rightarrow e^{iq\Sigma}\Phi$ のように変換する $U(1)$ チャージ q の場に対して，$U(1)$ 共変微分は

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - i\,q\,Q_\mu)\,\Phi \tag{5.23}$$

のように定義される．(5.21), (5.23) から，簡単な計算により，公式

$$D_\mu V^{\alpha}{}_{+} = P_\mu V^{\alpha}{}_{-}, \quad \partial_{[\mu} Q_{\nu]} = i\,P^*_{[\mu} P_{\nu]}, \quad D_{[\mu} P_{\nu]} = 0 \tag{5.24}$$

が得られる．この式の後の 2 つは，$D = 4$, $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論で，Maurer–Cartan 方程式から得られた (4.97) に相当する式である．

大局的 $SU(1,1)$ 変換と局所的 $U(1)$ 変換に対する場の変換性を表 5.2 にまとめた．スカラー場以外のボソン場は，$U(1)$ 変換に対しては不変で，$SU(1,1)$ 変換に対してだけ変換する．2 階の複素反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ から，$B^1_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$,

表 5.2　$D=10, \mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論の $SU(1,1)$ 表現と $U(1)$ チャージ.

[redacted]						
[redacted]	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**
[redacted]	0	0	0	± 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

$B^2_{\mu\nu} = B^*_{\mu\nu}$ を定義すると，$B^\alpha_{\mu\nu}$ $(\alpha = 1, 2)$ は，$SU(1,1)$ の **2** 表現によって変換する．フェルミオン場は，$SU(1,1)$ 変換に対しては不変で，$U(1)$ 変換に対しては表 5.2 の $U(1)$ チャージをもつ．スカラー場だけは，$SU(1,1)$ と $U(1)$ の両方に対して変換する．

局所対称性

この理論はいろいろな局所変換に対する対称性をもっている．ボソン的な局所変換には，一般座標変換 $\delta_G(\xi)$, 局所 Lorentz 変換 $\delta_L(\lambda)$, 反対称テンソル場のゲージ変換 $\delta_g(\zeta)$, $U(1)$ 変換 $\delta_{U(1)}(\Sigma)$ がある．$U(1)$ 変換は，上で述べたように，スカラー場を $SU(1,1)$ 行列で表したときに，余分な自由度を取り除くために必要な対称性の変換である．反対称テンソル場のゲージ変換は，

$$\begin{aligned} &\delta_g B^\alpha_{\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}\,\zeta^\alpha_{\nu]}, \\ &\delta_g B_{\mu\nu\rho\sigma} = 4\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu\rho\sigma]} + 2\,i\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\zeta^\alpha_{[\mu}\,F^\beta_{\nu\rho\sigma]}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

によって与えられる．その他の場は，δ_g に対して不変である．反対称テンソル場の場の強さを，

$$\begin{aligned} &F^\alpha_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\,B^\alpha_{\nu\rho]}, \\ &F_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = 5\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho\sigma\tau]} - 5\,i\,\epsilon_{\alpha\beta}\,B^\alpha_{[\mu\nu}\,F^\beta_{\rho\sigma\tau]} \end{aligned} \tag{5.26}$$

と定義すると，これらは (5.25) に対して不変である．また，

$$F_{\mu\nu\rho} = -\epsilon_{\alpha\beta}\,V^\alpha{}_+\,F^\beta_{\mu\nu\rho} \tag{5.27}$$

とおく．これは，$SU(1,1)$ 変換に対して不変で，$U(1)$ チャージ $+1$ をもつ量である．条件 (5.18) を使うと，

$$F^\alpha_{\mu\nu\rho} = V^\alpha{}_-\,F_{\mu\nu\rho} + V^\alpha{}_+\,F^*_{\mu\nu\rho} \tag{5.28}$$

が成り立つ．

フェルミオン的な局所変換は，正カイラリティ Weyl スピノール $\epsilon(x)$ をパラメータとする $\mathcal{N}=(2,0)$ 局所超変換 $\delta_Q(\epsilon)$ である．場の変換性は，

$$\begin{aligned} \delta_Q\,e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\left(\bar{\epsilon}\,\gamma^a\,\psi_\mu - \bar{\psi}_\mu\,\gamma^a\,\epsilon\right), \\ \delta_Q\,V^\alpha{}_+ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,V^\alpha{}_-\,\bar{\epsilon^c}\,\lambda, \\ \delta_Q\,B^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left(V^\alpha{}_-\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{\mu\nu}\,\lambda - V^\alpha{}_+\,\bar{\lambda}\,\gamma_{\mu\nu}\,\epsilon\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(V^\alpha{}_-\,\bar{\epsilon^c}\,\gamma_{[\mu}\,\psi_{\nu]} - V^\alpha{}_+\,\bar{\psi}_{[\nu}\,\gamma_{\mu]}\,\epsilon^c\right), \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_Q B_{\mu\nu\rho\sigma} &= i\,\bar{\epsilon}\,\gamma_{[\mu\nu\rho}\,\psi_{\sigma]} - i\,\bar{\psi}_{[\sigma}\,\gamma_{\mu\nu\rho]}\,\epsilon + 3\,i\,\epsilon_{\alpha\beta}\,B^{\alpha}_{[\mu\nu}\,\delta_Q\,B^{\beta}_{\rho\sigma]}, \\
\delta_Q \psi_\mu &= D_\mu \epsilon - \frac{1}{16\times 5!}\,i\,\gamma^{\nu_1\cdots\nu_5}\,\gamma_\mu\,\epsilon\,F_{\nu_1\cdots\nu_5} \\
&\qquad + \frac{1}{48\sqrt{2}}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma} - 9\,\delta^\nu_\mu\,\gamma^{\rho\sigma}\right)\epsilon^c\,F_{\nu\rho\sigma} + \cdots, \\
\delta_Q \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\gamma^\mu\,\epsilon^c\,P_\mu - \frac{1}{24}\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,\epsilon\,F_{\mu\nu\rho} + \cdots
\end{aligned}
$$

によって与えられる．ここで，ϵ^c はスピノール ϵ の荷電共役を表し，“$\cdots$” はフェルミオン場について高次の項を表す．超変換 (5.29) は，交換関係

$$
[\delta_Q(\epsilon_1),\,\delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_{U(1)}(\Sigma) + \delta_Q(\epsilon) \qquad (5.30)
$$

を満たす．右辺にはすべての局所変換が現れ，その変換パラメータは，

$$
\begin{aligned}
\xi^\mu &= \frac{1}{4}\left(\bar{\epsilon}_2\,\gamma^\mu\,\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\,\gamma^\mu\,\epsilon_2\right), \\
\lambda_{ab} &= -\xi^\mu\,\omega_{\mu ab} - \frac{1}{96}\,i\,\left(\bar{\epsilon}_2\,\gamma^{\nu\rho\sigma}\,\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\,\gamma^{\nu\rho\sigma}\,\epsilon_2\right)F_{\nu\rho\sigma ab} \\
&\qquad - \frac{1}{96\sqrt{2}}\,\bar{\epsilon_2}\left(\gamma^{\nu\rho\sigma}{}_{ab} + 18\,e^\rho{}_a\,e^\sigma{}_b\,\gamma^\nu\right)\epsilon^c_1\,F_{\nu\rho\sigma} \\
&\qquad + \frac{1}{96\sqrt{2}}\,\bar{\epsilon_1}{}^c\left(\gamma^{\nu\rho\sigma}{}_{ab} + 18\,e^\rho{}_a\,e^\sigma{}_b\,\gamma^\nu\right)\epsilon_2\,F^*_{\nu\rho\sigma}, \\
\zeta^\alpha_\mu &= -\xi^\nu\,B^\alpha_{\nu\mu} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\bar{\epsilon}^c_2\,\gamma_\mu\,\epsilon_1\,V^\alpha{}_- + \bar{\epsilon}_2\,\gamma_\mu\,\epsilon^c_1\,V^\alpha{}_+\right), \\
\zeta_{\mu\nu\rho} &= -\xi^\sigma\,B_{\sigma\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}\,i\,\left(\bar{\epsilon}_2\,\gamma_{\mu\nu\rho}\,\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\,\gamma_{\mu\nu\rho}\,\epsilon_2\right) \\
&\qquad - \frac{3}{4\sqrt{2}}\,i\,\epsilon_{\alpha\beta}\,B^\alpha_{[\mu\nu}\left(\bar{\epsilon}^c_2\,\gamma_{\rho]}\,\epsilon_1\,V^\beta{}_- + \bar{\epsilon}_2\,\gamma_{\rho]}\,\epsilon^c_1\,V^\beta{}_+\right), \\
\Sigma &= -\xi^\mu\,Q_\mu
\end{aligned} \qquad (5.31)
$$

で与えられる．ただし，すべての場に対して上の交換関係が成り立つためには，次に述べる場の方程式を使う必要がある．つまり，交換関係 (5.30) は，オン・シェルでのみ閉じている．

場の方程式

反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ は自己双対方程式を満たす．相互作用も含めた方程式の形は，

$$
\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = *\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \qquad (5.32)
$$

である．ここで，$\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ は，(5.26) の場の強さを使って，

$$
\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = F_{\mu\nu\rho\sigma\tau} - 5\,i\,\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma_{\nu\rho\sigma}\,\psi_{\tau]} + \frac{1}{8}\,i\,\bar{\lambda}\,\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,\lambda \qquad (5.33)
$$

で与えられる．記号 ^ は，超共変的な量であること，つまり，その量の局所超変換が変換のパラメータの微分 $\partial_\mu\epsilon$ を含まないことを表している．自己双対方程式 (5.32) は，$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ に対する場の方程式とみなすことができる．(5.32) の両

辺に共変微分 D^μ を作用させると，場の 2 階微分を含んだ Maxwell 型方程式

$$\begin{aligned} D_\tau F^{\tau\mu\nu\rho\sigma} &= -\frac{1}{72}\, i\, e^{-1}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda_1\cdots\lambda_6}\, \epsilon_{\alpha\beta}\, F^{\alpha}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\, F^{\beta}_{\lambda_4\lambda_5\lambda_6} \\ &\qquad + \frac{1}{4}\, i\, D_\tau \left(\bar{\psi}_{[\lambda}\, \gamma^{\lambda}\, \gamma^{\tau\mu\nu\rho\sigma}\, \gamma^{\kappa}\, \psi_{\kappa]} - \bar{\lambda}\, \gamma^{\tau\mu\nu\rho\sigma}\, \lambda\right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

が得られる．自己双対方程式 (5.32) は，この方程式よりも強い条件式である．

その他の場の方程式は，

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R &= P^*_\mu\, P_\nu + P^*_\nu\, P_\mu - g_{\mu\nu}\, P^*_\rho\, P^\rho + \frac{1}{96} F_{\mu\rho\sigma\tau\lambda}\, F_\nu{}^{\rho\sigma\tau\lambda} \\ &\qquad + \frac{1}{4}\left(F^*_{\mu\rho\sigma}\, F_\nu{}^{\rho\sigma} + F^*_{\nu\rho\sigma}\, F_\mu{}^{\rho\sigma} - \frac{1}{3}\, g_{\mu\nu}\, F_{\rho\sigma\tau}\, F^{\rho\sigma\tau}\right) \\ &\qquad + \cdots, \\ D_\rho\, F^{\rho\mu\nu} &= P_\rho\, F^{*\rho\mu\nu} + \frac{1}{6}\, i\, F^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\, F_{\rho\sigma\tau} + \cdots, \\ D_\mu\, P^\mu &= -\frac{1}{12}\, F_{\mu\nu\rho}\, F^{\mu\nu\rho} + \cdots, \\ \gamma^{\mu\nu\rho}\, \hat{D}_\nu\, \psi_\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \gamma^\nu\, \gamma^\mu\, \lambda^c P_\nu + \frac{1}{24}\, \gamma^{\nu\rho\sigma}\, \gamma^\mu\, \lambda\, F^*_{\nu\rho\sigma} + \cdots, \\ \gamma^\mu\, \hat{D}_\mu\, \lambda &= -\frac{1}{8\times 5!}\, i\, \gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\, \lambda\, F_{\mu_1\cdots\mu_5} + \cdots \end{aligned} \tag{5.35}$$

である．"$\cdots$" は，フェルミオン場について高次の項を表す．また，フェルミオン場の方程式の左辺の $\hat{D}_\mu$ は超共変微分であり，

$$\begin{aligned} \hat{D}_{[\nu}\, \psi_{\rho]} &= D_{[\nu}\, \psi_{\rho]} + \frac{1}{16\times 5!}\, i\, \gamma^{\lambda_1\cdots\lambda_5}\, \gamma_{[\rho}\, \psi_{\nu]}\, \hat{F}_{\lambda_1\cdots\lambda_5} \\ &\qquad - \frac{1}{48\sqrt{2}}\left(\gamma_{[\rho}{}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} - 9\, \delta^{\lambda_1}_{[\rho}\, \gamma^{\lambda_2\lambda_3}\right)\psi^c_{\nu]}\, \hat{F}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}, \\ \hat{D}_\mu\, \lambda &= D_\mu\, \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \gamma^\nu\, \psi^c_\mu\, \hat{P}_\nu + \frac{1}{24}\, \gamma^{\nu\rho\sigma}\, \psi_\mu\, \hat{F}_{\nu\rho\sigma} \end{aligned} \tag{5.36}$$

と定義される．ここで，超共変な量 (5.33)，および，

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu\rho} &= F_{\mu\nu\rho} - \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\, \bar{\psi}^c{}_{[\mu}\, \gamma_\nu\, \psi_{\rho]} + \bar{\psi}_{[\mu}\, \gamma_{\nu\rho]}\, \lambda\right), \\ \hat{P}_\mu &= P_\mu - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \bar{\psi}^c{}_\mu\, \lambda \end{aligned} \tag{5.37}$$

を使った．超共変微分 (5.36) の超変換は，変換のパラメータの微分 $\partial_\mu\epsilon$ を含まない．場の方程式 (5.32), (5.35) は，上で述べた局所変換に対して不変である．

ラグランジアン

4 階の反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ の自己双対性のために，すべての場の方程式を導くような簡単な形の共変的なラグランジアンは知られていない．しかし，$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ 以外の場の方程式を導く共変的ラグランジアンは存在する．そのようなラグランジアンは，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & e\,R - 2\,e\,P^*_\mu\,P^\mu - \frac{1}{6}\,e\,F^*_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4\times 5!}\,e\,F_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,F^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \\
& + \frac{1}{144\times 4!}\,i\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,B_{\mu_1\cdots\mu_4}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,F^\alpha_{\mu_5\mu_6\mu_7}\,F^\beta_{\mu_8\mu_9\mu_{10}} - e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi_\rho \\
& - e\,\bar{\lambda}\,\gamma^\mu\,D_\mu\,\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\lambda^c\,P_\nu + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e\,\bar{\lambda^c}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\psi_\mu\,P^*_\nu \\
& + \frac{1}{24\sqrt{2}}\,e\left(\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\nu\,\psi^c_{\nu]} - \sqrt{2}\,\bar{\lambda}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\psi_\mu\right)F_{\rho\sigma\tau} \\
& + \frac{1}{24\sqrt{2}}\,e\left(\bar{\psi^c}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\nu\,\psi_{\nu]} + \sqrt{2}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\mu\,\lambda\right)F^*_{\rho\sigma\tau} \\
& + \frac{1}{8\times 5!}\,i\,e\left(\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho_1\cdots\rho_5}\,\gamma^\nu\psi_{\nu]} - \bar{\lambda}\,\gamma^{\rho_1\cdots\rho_5}\,\lambda\right)F_{\rho_1\cdots\rho_5} + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

である．ここで，"$\cdots$" は，フェルミオン場について 4 次の項を表す．このラグランジアンを $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ 以外の場について変分を行うと，場の方程式 (5.35) が得られる．また，$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ についての変分からは，方程式 (5.34) が得られる．この方程式は，自己双対方程式 (5.32) に共変微分 D^μ を作用して得られたものだったので，それと矛盾しない．したがって，ラグランジアン (5.38) から導かれる場の方程式に，自己双対方程式 (5.32) を加えれば，すべての場の方程式が得られる．

スカラー場のゲージ固定

スカラー場に作用する局所 $U(1)$ 変換に対してゲージ固定を行ない，物理的な自由度だけを使ってスカラー場を記述することもできる．一般に，$SU(1,1)$ 行列 (5.17) は，複素スカラー場 $B(x)$ と実スカラー場 $\theta(x)$ を独立な場として，

$$
V = \frac{1}{\sqrt{1-|B|^2}}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & B\,e^{i\theta} \\ B^*\,e^{-i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{5.39}
$$

と表すことができる．$B(x)$ は，単位円盤内 $|B|<1$ に値をもつとする．条件 (5.18) が満たされていることは，容易に確かめられる．これらの場は，局所 $U(1)$ 変換 (5.19) によって，$B\to B$, $\theta\to\theta+\Sigma$ と変換する．したがって，θ に対して条件を課せば，ゲージが固定されることになる．便利なゲージ固定条件として，

$$
e^{i\theta} = \left(\frac{1+B^*}{1+B}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.40}
$$

をとろう．これによって，スカラー場は，独立な自由度をもつ $B(x)$ だけで表されることになる．

ゲージを固定した場合，$SU(1,1)$ 変換や局所超変換を行うとゲージ条件を満たさなくなるので，それを相殺するような局所 $U(1)$ 変換を同時に行う必要がある．$SU(1,1)$ 変換の場合は，相殺局所 $U(1)$ 変換は次のように求めることが

できる．無限小 $SU(1,1)$ 変換を考えよう．(5.19) の $SU(1,1)$ 変換の行列 g の成分は，$u = 1 + i\beta$, $v = \alpha$（α は複素数，β は実数の無限小パラメータ）と書ける．まず，$V^1{}_- e^{i\theta} = 1/\sqrt{1-|B|^2}$ の変換を考えると，

$$\delta\left(\frac{1}{\sqrt{1-|B|^2}}\right) = \frac{i\,\beta + \alpha\,B^* + i\,\delta\,\theta - i\,\Sigma}{\sqrt{1-|B|^2}} \tag{5.41}$$

となる．左辺は実数なので，右辺の虚部がゼロになることから，

$$\Sigma = \beta + \mathrm{Im}\,(\alpha\,B^*) + \delta\,\theta \tag{5.42}$$

が得られる．次に，$V^1{}_+ e^{-i\theta} = B/\sqrt{1-|B|^2}$ の変換を考えると，

$$\delta\left(\frac{B}{\sqrt{1-|B|^2}}\right) = \frac{i\,\beta\,B + \alpha - i\,\delta\,\theta\,B + i\,\Sigma\,B}{\sqrt{1-|B|^2}} \tag{5.43}$$

となる．これに，(5.41), (5.42) を使うと，B の変換

$$\delta\,B = \alpha + 2\,i\,\beta\,B - \alpha^*\,B^2 \tag{5.44}$$

が得られる．また，(5.42), (5.40), (5.44) から，相殺 $U(1)$ 変換のパラメータが，

$$\Sigma = (\beta - \mathrm{Im}\,\alpha)\,\frac{1-|B|^2}{|1+B|^2} \tag{5.45}$$

と決まる．無限小変換 (5.44) に対応する有限な $SU(1,1)$ 変換は，1 次分数変換

$$B \;\to\; B' = \frac{u\,B + v}{v^*\,B + u^*} \qquad \big(|u|^2 - |v|^2 = 1\big) \tag{5.46}$$

である．

超弦理論との関係を考えるには，単位円盤内に値をもつ複素スカラー場 $B(x)$ から，変数変換

$$-i\,\tau = \frac{1-B}{1+B} \tag{5.47}$$

によって定義される複素上半面に値をもつ複素スカラー場 $\tau(x)$ $(\mathrm{Im}\,\tau > 0)$ を使うと便利である．τ の無限小 $SU(1,1)$ 変換は，(5.44) から，

$$\delta\,\tau = (\beta + \mathrm{Im}\,\alpha) - 2\,(\mathrm{Re}\,\alpha)\,\tau + (\beta - \mathrm{Im}\,\alpha)\,\tau^2 \tag{5.48}$$

となり，対応する有限変換は，

$$\tau \;\to\; \tau' = \frac{a\,\tau + b}{c\,\tau + d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R},\; ad - bc = 1) \tag{5.49}$$

と書ける．これは，1 次分数変換の形の $SL(2,\,\mathbb{R})$ $(\sim SU(1,1))$ 変換である．τ と $B^{\alpha}_{\mu\nu}$ を実部と虚部に分け，

$$\tau = C + i\,e^{-\phi}, \qquad B^1_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B^{(1)}_{\mu\nu} + i\,B^{(2)}_{\mu\nu}\right) = (B^2_{\mu\nu})^* \tag{5.50}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi + i\,e^\phi\partial_\mu C\right), \qquad Q_\mu = -\frac{1}{2}\,e^\phi\,\partial_\mu C,\\
&F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\,F^{(1)}_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\,e^{\frac{1}{2}\phi}\,(F^{(2)}_{\mu\nu\rho} - CF^{(1)}_{\mu\nu\rho}),\\
&F_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = 5\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho\sigma\tau]} - 5\,\epsilon_{ij}\,B^{(i)}_{[\mu\nu}\,F^{(j)}_{\rho\sigma\tau]}
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

が得られる．ここで，$F^{(i)}_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}B^{(i)}_{\nu\rho]}$, $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$，$\epsilon_{12} = +1$ である．これらの式を使って，ラグランジアン (5.38) を書き直すことができる．簡単のため，ボソン場だけに依存する項だけを書くと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\, e\,R - \frac{1}{2}\,e\left(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + e^{2\phi}\,\partial_\mu C\,\partial^\mu C\right) - \frac{1}{12}\,e\,e^{-\phi}\,F^{(1)}_{\mu\nu\rho}\,F^{(1)\mu\nu\rho}\\
&-\frac{1}{12}\,e\,e^{\phi}(F^{(2)} - CF^{(1)})_{\mu\nu\rho}\,(F^{(2)} - CF^{(1)})^{\mu\nu\rho}\\
&-\frac{1}{4\times 5!}\,e\,F_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,F^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\\
&+\frac{1}{144\times 4!}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,B_{\mu_1\cdots\mu_4}\,\epsilon_{ij}\,F^{(i)}_{\mu_5\mu_6\mu_7}\,F^{(j)}_{\mu_8\mu_9\mu_{10}} + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

となる．"…" はフェルミオン場に依存する項を表す．

ゲージ固定したことにより，局所超変換についても，相殺 $U(1)$ 変換が必要である．$SU(1,1)$ 変換についての (5.41)–(5.45) と同様な計算により，相殺 $U(1)$ 変換のパラメータは，

$$
\Sigma = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i\,\left(\bar{\epsilon}^c\,\lambda - \bar{\lambda}\,\epsilon^c\right) \tag{5.53}
$$

と得られる．また，スカラー場の変換は，

$$
\delta\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\,e^{-\phi}\,\bar{\epsilon}^c\,\lambda \tag{5.54}
$$

となる．その他の $U(1)$ チャージがゼロでない場 ψ_μ, λ もこの相殺 $U(1)$ 変換を受けるが，その超変換への寄与は，(5.29) で省略したフェルミオン場の高次の項の変更となる．

ストリングフレーム

$D=10$, $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論は，IIB 型超弦理論の低エネルギー有効理論である．IIA 型超弦理論の場合と同様に，通常，超弦理論の有効理論として使われるラグランジアンは，(5.38) や (5.52) ではなく，重力場の変数変換 (5.15) をして得られるストリングフレームのラグランジアン

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\, e\,e^{-2\phi}\left[R + 4\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}\,F^{(1)}_{\mu\nu\rho}\,F^{(1)\mu\nu\rho}\right] - \frac{1}{4\times 5!}\,e\,F_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,F^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\\
&-\frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu C\,\partial^\mu C - \frac{1}{12}\,e\,(F^{(2)} - CF^{(1)})_{\mu\nu\rho}\,(F^{(2)} - CF^{(1)})^{\mu\nu\rho}\\
&+\frac{1}{144\times 4!}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,B_{\mu_1\cdots\mu_4}\,\epsilon_{ij}\,F^{(i)}_{\mu_5\mu_6\mu_7}\,F^{(j)}_{\mu_8\mu_9\mu_{10}} + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

である．“$\cdots$” は，フェルミオン場を含む項を表す．このラグランジアンも，超弦理論の NS-NS セクターの場 $e_\mu{}^a$, ϕ, $B^{(1)}_{\mu\nu}$ だけを含む項にはディラトン場の因子 $e^{-2\phi}$ が掛かっているが，R-R セクターの場 C, $B^{(2)}_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含む項にはそれがない．自己双対方程式 (5.32) は，Einstein フレームとストリングフレームのどちらでも同じ形である．ラグランジアンのフェルミオン場を含む項については，置き換え (5.16) を同時に行うと，R-R 場を含む項にはディラトン場の因子が現れない．

この超重力理論を低エネルギー有効理論としてもつ IIB 型超弦理論は，$SL(2,\mathbb{R})$ の離散的部分群 $SL(2,\mathbb{Z})$ の対称性をもつと考えられている*5)．この $SL(2,\mathbb{Z})$ は，(5.49) でパラメータ a,b,c,d を整数に制限した群であり，変換 $\tau' = -1/\tau$ を含む．スカラー場の因子 e^ϕ は弦理論の結合定数 g を表しているので，この変換は強結合 $g \gg 1$ と弱結合 $g \ll 1$ を入れ換える．このような強結合理論と弱結合理論を結びつける関係を **S 双対性**という．

5.5 $D = 10, \mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論

$\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論*6) は，I 型超弦理論とヘテロ型弦理論の低エネルギー有効理論である．この理論は，カイラリティに関して正負非対称なカイラルな理論である．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a(x)$, 正カイラリティの Majorana–Weyl Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, 2 階の実反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}(x)$, 負カイラリティの Majorana–Weyl スピノール場 $\lambda(x)$, 実スカラー場 $\phi(x)$ である．この超重力多重項の他に，さらに，物質場の超多重項としてベクトル多重項（超 Yang–Mills 多重項）$(A_\mu(x), \chi(x))$ を含むことができる（表 3.4 参照）．ここで，$A_\mu(x)$ はベクトル場，$\chi(x)$ は正カイラリティの Majorana–Weyl スピノール場であり，両方ともあるゲージ群の随伴表現によって変換する．

超重力多重項だけの理論

超重力多重項だけからなる理論は，$\mathcal{N} = (1,1)$ または $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論からトランケーションによって求めることができる．2.6 節で $D = 4, \mathcal{N} = 2$ 理論から $\mathcal{N} = 1$ 理論が得られたのと同様に，$\mathcal{N} = (1,1)$ または $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論で，場の方程式や局所超変換と矛盾しないように，いくつかの場をゼロとおけばよい．$\mathcal{N} = (1,1)$ 理論のトランケーションによって $\mathcal{N} = (1,0)$ 理論を求めるには，

$$\bar{\gamma}\psi_\mu = \psi_\mu, \quad \bar{\gamma}\lambda = -\lambda, \quad B_{\mu\nu\rho} = 0, \quad B_\mu = 0 \tag{5.56}$$

---

*5) C.M. Hull and P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109.

*6) A.H. Chamseddine, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 403; E. Bergshoeff, M. de Roo, B. de Wit and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B195** (1982) 97; G.F. Chapline and N.S. Manton, *Phys. Lett.* **B120** (1983) 105.

とおく．これらの条件は，場の方程式やパラメータが $\bar{\gamma}\epsilon = \epsilon$ を満たす $\mathcal{N} = (1, 0)$ 局所超変換と矛盾しないものになっている．同様に，$\mathcal{N} = (2, 0)$ 理論のトランケーションによって $\mathcal{N} = (1, 0)$ 理論を求めるには，

$$\psi_\mu^c = \psi_\mu, \quad \lambda^c = \lambda, \quad B_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad B_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad C = 0 \tag{5.57}$$

とおき，$\psi_\mu \to \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_\mu$, $\lambda \to \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$, $B_{\mu\nu}^{(1)} \to B_{\mu\nu}$ と書き換える．これらの条件も場の方程式やパラメータが $\epsilon^c = \epsilon$ を満たす $\mathcal{N} = (1, 0)$ 局所超変換と矛盾しないものになっていて，上と同じ理論を導く．

このようにして得られる理論のラグランジアンや局所超変換の形は，下で考える超 Yang–Mills 理論と結合した理論の式 (5.62), (5.66) で，$1/g^2 = 0$ とおいたものである．

超 Yang–Mills 理論

超重力多重項と超 Yang–Mills 多重項の結合を考える前に，超 Yang–Mills 多重項だけの理論を平坦な Minkowski 時空で考えよう．これは，大局的な超対称性をもつ理論である．ゲージ群 G の**超 Yang–Mills 理論**に含まれている場は，ゲージ場 $A_\mu^I(x)$ と正カイラリティ Majorana–Weyl スピノール場 $\chi^I(x)$ $(I = 1, 2, \cdots, \dim G)$ である．これらの場は，ゲージ群の随伴表現によって変換する．ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{g^2} \operatorname{tr}(\bar{\chi} \gamma^\mu D_\mu \chi) \tag{5.58}$$

である．ここで，ゲージ結合定数 g と表現行列 T_I を使って，行列に値をもつ場

$$A_\mu(x) = -i\, g\, A_\mu^I(x)\, T_I, \qquad \chi(x) = -i\, g\, \chi^I(x)\, T_I \tag{5.59}$$

を定義した（1.5 節参照）．また，ゲージ場の場の強さと共変微分は，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu \chi &= \partial_\mu \chi + [A_\mu, \chi] \end{aligned} \tag{5.60}$$

と定義されている．このラグランジアンからつくった作用は，変換パラメータが定数の正カイラリティ Majorana–Weyl スピノール ϵ である大局的超変換

$$\delta_Q A_\mu = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \chi, \qquad \delta_Q \chi = \frac{1}{4\sqrt{2}} \gamma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} \tag{5.61}$$

に対して不変である．

超重力理論と超 Yang–Mills 理論の結合

超重力多重項と超 Yang–Mills 多重項が結合した理論のラグランジアンは，

表 5.3　$D=10, \mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論の $GL(1,\mathbb{R})^+$ ウェイト.

[redacted]							
[redacted]	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}\,e\,e^{-\phi}\,F_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi_\rho \\
& -\frac{1}{2}\,e\,\bar{\lambda}\,\gamma^\mu\,D_\mu\,\lambda + \frac{1}{2g^2}\,e\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\,\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}) + \frac{1}{g^2}\,e\,\mathrm{tr}\,(\bar{\chi}\,\gamma^\mu D_\mu\,\chi) \\
& -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\lambda\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{48}\,e\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\Big[\bar{\psi}_{[\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\nu\,\bar{\gamma}\,\psi_{\nu]} \\
& -\sqrt{2}\,\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\gamma^\mu\,\lambda - \frac{2}{g^2}\,\mathrm{tr}\,(\bar{\chi}\,\gamma^{\rho\sigma\tau}\,\chi)\Big]F_{\rho\sigma\tau} \\
& -\frac{1}{2\sqrt{2}g^2}\,e\,e^{-\frac{1}{4}\phi}\,\mathrm{tr}\left[\left(\bar{\psi}_\mu\,\gamma^{\rho\sigma}\,\gamma^\mu\,\chi - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{\lambda}\,\gamma^{\rho\sigma}\,\chi\right)F_{\rho\sigma}\right] + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

である．“$\cdots$” はフェルミオン場の 4 次の項を表す．ψ_μ, λ に対する共変微分 D_μ は，ゲージ場としてはスピン接続だけを含んでいる．χ に対する共変微分は，スピン接続の他に，(5.60) の形の Yang–Mills 場の項を含む．Yang–Mills 場の場の強さは (5.60) で与えられる．反対称テンソル場の場の強さは，

$$
F_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho]} + \frac{6}{g^2}\,\mathrm{tr}\left(A_{[\mu}\,\partial_\nu\,A_{\rho]} + \frac{2}{3}\,A_{[\mu}\,A_\nu\,A_{\rho]}\right) \tag{5.63}
$$

のように Yang–Mills 場に依存した項を含む．この項は **Chern–Simons 項**とよばれ，第 8 章のアノマリーの相殺の議論で重要な役割を果たす．この項があるため，$F_{\mu\nu}$ に対する Bianchi 恒等式は，

$$
\partial_{[\mu}\,F_{\nu\rho\sigma]} = \frac{3}{2g^2}\,\mathrm{tr}\left(F_{[\mu\nu}\,F_{\rho\sigma]}\right) \tag{5.64}
$$

のように変更を受ける．

ラグランジアン (5.62) は，大局的な $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換 $\Phi(x) \to e^{w\Lambda}\Phi(x)$ に対して不変である．それぞれの場のウェイト w を表 5.3 に与えた．ラグランジアン (5.62) からつくった作用は，一般座標変換 $\delta_G(\xi)$, 局所 Lorentz 変換 $\delta_L(\lambda)$, 反対称テンソル場のゲージ変換 $\delta_g(\zeta)$, Yang–Mills ゲージ変換 $\delta_{\mathrm{YM}}(v)$, 局所超変換 $\delta_Q(\epsilon)$ に対して不変である．反対称テンソル場のゲージ変換と Yang–Mills ゲージ変換のゼロでない変換は，

$$
\begin{aligned}
& (\delta_g + \delta_{\mathrm{YM}})B_{\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu]} - \frac{2}{g^2}\,\mathrm{tr}\left(v\,\partial_{[\mu}\,A_{\nu]}\right), \\
& \delta_{\mathrm{YM}}\,A_\mu = D_\mu\,v, \qquad \delta_{\mathrm{YM}}\,\chi = [\chi,\,v]
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

である．(5.62) の Chern–Simons 項は Yang–Mills ゲージ変換に対して不変ではないが，反対称テンソル場も変換するため，場の強さ (5.63) 全体はゲージ変

換 (5.65) に対して不変である．

局所超変換は，$\epsilon(x)$ を正カイラリティの Majorana–Weyl スピノールの変換パラメータとして，

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\, e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\,\bar\epsilon\,\gamma^a\,\psi_\mu,\\
\delta_Q\,\phi &= -\frac{1}{2\sqrt2}\,\bar\epsilon\,\lambda,\\
\delta_Q\, B_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,e^{\frac12\phi}\,\bar\epsilon\,\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]} - \frac{1}{4\sqrt2}\,e^{\frac12\phi}\,\bar\epsilon\,\gamma_{\mu\nu}\,\lambda + \frac{1}{\sqrt2 g^2}\,e^{\frac14\phi}\,\mathrm{tr}\left(\bar\epsilon\,\gamma_{[\mu}\,\chi\,A_{\nu]}\right),\\
\delta_Q\,\psi_\mu &= D_\mu\,\epsilon + \frac{1}{96}\,e^{-\frac12\phi}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma} - 9\,\delta_\mu^\nu\,\gamma^{\rho\sigma}\right)\bar\gamma\,\epsilon\,F_{\nu\rho\sigma} + \cdots, \qquad (5.66)\\
\delta_Q\,\lambda &= -\frac{1}{2\sqrt2}\,\gamma^\mu\,\epsilon\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{24\sqrt2}\,e^{-\frac12\phi}\,\gamma^{\mu\nu\rho}\,\epsilon\,F_{\mu\nu\rho} + \cdots,\\
\delta_Q\,A_\mu &= -\frac{1}{2\sqrt2}\,e^{\frac14\phi}\,\bar\epsilon\,\gamma_\mu\,\chi,\\
\delta_Q\,\chi &= \frac{1}{4\sqrt2}\,e^{-\frac14\phi}\,\gamma^{\mu\nu}\,\epsilon\,F_{\mu\nu} + \cdots
\end{aligned}
$$

で与えられる．“$\cdots$” はフェルミオン場について高次の項を表す．$B_{\mu\nu}$ の変換の最後の項は，Yang–Mills ゲージ変換に対して不変ではないが，場の強さ (5.63) の超変換は，

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\,F_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}&\left(\frac12\,e^{\frac12\phi}\,\bar\epsilon\,\gamma_\nu\,\psi_{\rho]} - \frac{1}{4\sqrt2}\,e^{\frac12\phi}\,\bar\epsilon\,\gamma_{\nu\rho]}\,\lambda\right)\\
&-\frac{3}{\sqrt2 g^2}\,e^{\frac14\phi}\,\mathrm{tr}\left(\bar\epsilon\,\gamma_{[\mu}\,\chi\,F_{\nu\rho]}\right) \qquad (5.67)
\end{aligned}
$$

のようにゲージ不変な形をしている．局所超変換の交換関係は，フェルミオン場の方程式を使うと，

$$
[\delta_Q(\epsilon_1),\,\delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_g(\zeta) + \delta_{\mathrm{YM}}(v) + \delta_Q(\epsilon) \qquad (5.68)
$$

となる．右辺に現れる変換のパラメータは，

$$
\begin{aligned}
\xi^\mu &= \frac14\,\bar\epsilon_2\,\gamma^\mu\,\epsilon_1,\\
\lambda_{ab} &= -\xi^\mu\,\omega_{\mu ab} - \frac{1}{192}\,e^{-\frac12\phi}\left(\bar\epsilon_2\,\gamma_{ab}{}^{\mu\nu\rho}\,\epsilon_1\,F_{\mu\nu\rho} + 72\,\xi^\mu\,F_{\mu ab}\right), \qquad (5.69)\\
\zeta_\mu &= -\xi^\nu\,B_{\nu\mu} - e^{\frac12\phi}\,\xi_\mu,\\
v &= -\xi^\mu\,A_\mu
\end{aligned}
$$

である．

ストリングフレーム

$D=10,\ \mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論は，I 型超弦理論，および，ヘテロ型弦理論の低エネルギー有効理論である．しかし，通常，弦理論の有効理論として使われるラグランジアンは，(5.62) とは異なっている．I 型超弦理論の有効ラグラ

ンジアンは,

$$\mathcal{L} = e\,e^{-2\phi}\,(R + 4\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi) - \frac{1}{12}F_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2g^2}e^{-\phi}\,\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}) + \cdots \tag{5.70}$$

である．"$\cdots$" は，フェルミオン場を含む項を表す．NS-NS セクターの場 ${e_\mu}^a$, ϕ だけを含む項にはディラトン場の因子 $e^{-2\phi}$ が掛かっており，R-R セクターの場 $B_{\mu\nu}$ を含む項にはそれがない．また，Yang–Mills 場 A_μ は開いた弦の状態であるため，それを含む項には $e^{-\phi}$ が掛かっている．一方，ヘテロ型弦理論の有効ラグランジアンは,

$$\mathcal{L} = e\,e^{-2\phi}\left[R + 4\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}F_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu})\right] + \cdots \tag{5.71}$$

である．この場合は，すべての場が閉じた弦の状態を表し，また，R-R セクターがないので，全体に $e^{-2\phi}$ が掛かっている．これらのラグランジアンは，(5.62) から場の変数変換によって得ることができる．(5.62) で，置き換え

$$\begin{aligned}
&\text{I 型：}\ {e_\mu}^a \ \to\ e^{-\frac{1}{4}\phi}\,{e_\mu}^a, \quad \phi \ \to\ -\phi, \\
&\text{ヘテロ型：}\ {e_\mu}^a \ \to\ e^{-\frac{1}{4}\phi}\,{e_\mu}^a, \quad \phi \ \to\ \phi
\end{aligned} \tag{5.72}$$

をすると，それぞれ，(5.70) と (5.71) が得られる．また，フェルミオン場を含む項については，(5.62) で置き換え (5.72), (5.16), および，$\chi \to e^{\frac{5}{8}\phi}\chi$ を行うと，I 型超弦理論の R-R セクターの場を含む項にはディラトン場の因子が現れないことがわかる．

ゲージ群が $SO(32)$ の場合，I 型超弦理論とヘテロ型弦理論の両方が存在する．両方の理論の有効ラグランジアンが，(5.62) から変数変換によって得られることから，2 つの有効ラグランジアンの間に関係があることがわかる．実際，I 型超弦理論の有効ラグランジアン (5.70) で，置き換え

$${e_\mu}^a \ \to\ e^{-\frac{1}{2}\phi}\,{e_\mu}^a, \qquad \phi \ \to\ -\phi \tag{5.73}$$

をすると，ヘテロ型弦理論の有効ラグランジアン (5.71) が得られる．このとき，弦の結合定数を表す e^ϕ は，その逆数に置き換えられる．したがって，強結合（弱結合）の I 型超弦理論は，弱結合（強結合）のヘテロ型弦理論と対応することがわかる．これも 5.4 節の最後で述べた **S 双対性**の一つである．ゲージ群が $SO(32)$ の場合の I 型超弦理論とヘテロ型弦理論は，S 双対性で関係した等価な理論になっていると考えられている*7)．2 つの理論の有効ラグランジアンが変数変換で関係していることは，その一つの証拠である．

*7) J. Polchinski and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 525.

第 6 章
次元還元

高次元の場の理論から低次元の場の理論を求める方法に，時空のコンパクト化や次元還元がある．これらの方法では，高次元時空のいくつかの次元が小さなコンパクト空間になっていると仮定して，それ以外の次元によって表される低次元時空における理論を構成する．次元還元の方法は，スカラー場を含んだ超重力理論を構成する際や，異なる超重力理論の間の関係を理解するのに役立つ．この章では，超重力理論の次元還元を議論するための準備として，重力場，および，それに結合したいろいろな種類の場の理論の次元還元について述べる．

6.1 コンパクト化と次元還元

コンパクト化

超弦理論や M 理論では 10 次元や 11 次元の時空を考えるので，4 次元的な世界を説明するためには，高次元の理論から 4 次元の理論を導く方法が必要になる．高次元の場の理論から低次元の場の理論を得る方法として，時空の**コンパクト化**（compactification）の方法がある．これは，**Kaluza–Klein 理論**ともよばれ，高次元時空のいくつかの次元が，小さなコンパクト空間になっているとする考え方である．

例として，図 6.1 のような無限に長い円筒の表面を考えてみよう．横方向は無限に伸びていて，通常の時空を表す．縦方向は円周になっていて，コンパクトな次元を表す．円の半径を R とすると，コンパクトな方向は有限な長さ $2\pi R$ をもつ．この円筒を R に比べて十分大きなスケールで見ると，円周方向の大きさは無視できるので，太さをもたない直線に見える．このように，いくつかの方向が有限な大きさをもつ空間になっている場合，その大きさに比べて十分大きなスケールで見ると，その次元が無いように見える．

このことを，場の理論でよりくわしく見てみよう．例として，5 次元時空における実スカラー場 ϕ の理論を考えよう．図 6.1 のように，5 次元時空が 4 次

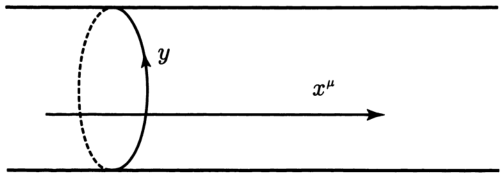


図 6.1　コンパクト化された時空.

元 Minkowski 時空 M_4 と半径 R の円周（1 次元球面）S^1 の直積 $M_4 \times S^1$ になっているとする．ϕ^4 型の相互作用をもつ 5 次元の作用は,

$$S = \int d^4x\,dy \left[-\frac{1}{2}\eta^{MN}\,\partial_M\phi\,\partial_N\phi - \frac{1}{4!}\lambda_5\,\phi^4 \right] \tag{6.1}$$

である．ここで，5 次元の座標 x^M $(M = 0,1,2,3,4)$ を，M_4 の座標 x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ と S^1 の座標 $x^4 = y$ $(0 \le y \le 2\pi R)$ に分けた．質量項は無いとした．場は y 方向に周期的な境界条件を満たしているので,

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\,e^{iny/R}, \qquad (\phi_n)^* = \phi_{-n} \tag{6.2}$$

のように座標 y について Fourier 展開することができる．展開係数 $\phi_n(x)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ は，残りの座標 x^μ の関数になっている．これを作用に代入して，y 積分を実行すると,

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_0\,\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{4!}\lambda_4\,\phi_0^4 - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \partial_\mu\phi_n^*\,\partial^\mu\phi_n + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \phi_n^*\,\phi_n \right\} \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4!}\lambda_4 \sideset{}{'}\sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty} \phi_{n_1}\,\phi_{n_2}\,\phi_{n_3}\,\phi_{-n_1-n_2-n_3} \right] \tag{6.3}$$

が得られる．ここで，$\lambda_4 = \lambda_5/(2\pi R)$ であり，和の記号 $\sum'$ は，$(n_1, n_2, n_3) = (0,0,0)$ の項を除いた和を意味する．この作用をみると，ゼロモード $\phi_0(x)$ は，ゼロ質量の 4 次元の実スカラー場を表し，高次モード $\phi_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ は，ゼロでない質量 $m_n = n/R$ をもつ 4 次元の複素スカラー場を表していることがわかる．このような質量をもつ高次モードを，**Kaluza–Klein モード**という．このようにして，5 次元の理論から無限個の場を含んだ 4 次元の理論が得られる．

Kaluza–Klein モードの粒子の質量は $1/R$ のオーダーなので，$1/R$ に比べて十分低い低エネルギーの現象を考える際は，高次モードを無視して，ゼロモードだけを考えればよい．作用 (6.3) の高次モードを含む各項は必ず高次モードを 2 つ以上含んでいるので，高次モードの場の方程式に矛盾せずに $\phi_n = 0$ $(n \neq 0)$ とおくことができる．その結果，ゼロモード $\phi_0(x)$ だけを含む 4 次元の場の理論が得られる．

この例では，コンパクトな次元は 1 次元の円周であったが，一般には，いろ

いろな次元や種類のコンパクト空間を使ったコンパクト化が考えられる．たとえば，d 次元トーラス T^d（d 個の S^1 の直積）や d 次元球面 S^d などを使うことができる．また，弦理論では，Calabi–Yau 空間とよばれる特別な 3 次元複素多様体を使ったコンパクト化が議論されている．

重力場を含む理論では，時空の形は重力場の方程式によって決まる．したがって，重力場を含む理論でコンパクト化を考える場合には，コンパクト空間を含む時空が重力場の方程式の解になっていなければならない．このように，重力場の方程式の解として，いくつかの次元がコンパクト空間になった時空が現れることを**自発的コンパクト化**（spontaneous compactification）という．

次元還元

高次元の理論からトーラスを使ったコンパクト化によって低次元の理論を求め，そこで高次の Kaluza–Klein モードをゼロとおき，ゼロモードだけの理論をつくる操作を**次元還元***1)（dimensional reduction）とよぶ．ゼロモードだけを残すということは，高次元の場がコンパクト化した次元の座標に依存しないとすることと同じである．たとえば，5 次元のスカラー場の理論 (6.1) を次元還元して，4 次元の理論を求める場合には，単純に場の y 依存性を落とし，$\phi(x,y) \to \phi_0(x)/\sqrt{2\pi R}$ と置き換えればよい．

ベクトル場や重力場など複数の成分をもつ場の次元還元は，もう少し複雑である．たとえば，5 次元のベクトル場の理論を次元還元して，4 次元の理論をつくることを考えよう．5 次元のベクトル場は 5 個の成分 (A_μ, A_y) $(\mu = 0,1,2,3)$ をもっているが，そのうちコンパクトではない次元方向の成分 A_μ は 4 次元のベクトル場を表し，コンパクトな次元方向の成分 A_y は 4 次元のスカラー場を表すことになる．同様に，5 次元の重力場の理論を次元還元すると，4 次元の重力場 $g_{\mu\nu}$, ベクトル場 $g_{\mu y}$, スカラー場 g_{yy} が得られる．ただし，4 次元の場の理論の標準的な形のラグランジアンを得るためには，5 次元の場の成分と 4 次元の場の成分の関係をうまく選ぶ必要がある．

高次元の超重力理論を次元還元することにより，低次元の超重力理論を求めることができる．次元還元によって超対称性の個数は保たれるので，同じ個数の超対称性をもった低次元の理論が得られる．10 次元以下の超重力理論は一般にスカラー場を含み，複雑な形をしているが，11 次元の超重力理論はスカラー場を含まず，比較的簡単な形をしている．そのため，11 次元の理論を次元還元することにより低次元の理論を構成すると見通しがよい．実際，4.3 節で述べたように，$D = 4, \mathcal{N} = 8$ 超重力理論は，11 次元の理論の次元還元によって構成された．また，次元還元は，いろいろな超重力理論の間の関係を理解するのにも役立つ．第 7 章で高次元の超重力理論の次元還元について議論する．

*1) 次元簡約，次元縮小などともよばれる．

6.2 いろいろな場の次元還元

超重力理論の次元還元を行うための準備として，高次元のいろいろな種類の場の理論が，次元還元によってどのような低次元の場の理論を導くかを見よう*2)．$\hat{D} = D + d$ 次元時空から D 次元時空への次元還元を考える．$\hat{D}$ 次元の座標を x^M $(M = 0, 1, \cdots, \hat{D} - 1)$, D 次元時空の座標を x^μ $(\mu = 0, 1, \cdots, D - 1)$, d 次元トーラスにコンパクト化した空間の座標を y^α $(\alpha = 1, 2, \cdots, d)$ とする．また，それぞれの局所 Lorentz 添字を，$A, B, \cdots = 0, 1, \cdots, \hat{D} - 1$, $a, b, \cdots = 1, 2, \cdots, D - 1$, $i = 1, 2, \cdots, d$ とする．トーラスの座標は，$0 \leq y^\alpha \leq 1$ の値をとるとする．前節の議論では，座標の範囲は $0 \leq y \leq 2\pi R$ で，S^1 の半径 R に依存していたが，以下では，トーラスの大きさや形などの情報は計量に含まれていると考える．したがって，$\hat{D}$ 次元のラグランジアンを $\mathcal{L}$ とすると，D 次元の理論の作用は

$$S = \int d^D x\, d^d y\, \mathcal{L} = \int d^D x\, \mathcal{L} \tag{6.4}$$

によって与えられる．

6.2.1 重力場

まず，重力場の理論の次元還元を考えよう．ボソン場だけの理論では，重力場を計量によって表すことができるが，後でフェルミオン場も扱うことを考え，多脚場を使う．また，多脚場を使ったほうが計算の見通しのよいときがある．$\hat{D}$ 次元の多脚場を $\hat{e}_M{}^A$ として，$\hat{D}$ 次元の量を $\hat{}$ をつけて表すことにする．$\hat{D}$ 次元のラグランジアンとしては，Einstein 型の

$$\mathcal{L} = \hat{e}\,\hat{R} \tag{6.5}$$

を使う．

D 次元の場

次元還元を行うために，場 $\hat{e}_M{}^A$ がコンパクト化した次元の座標 y^α に依存しないとする．$\hat{e}_M{}^A$ の成分は，D 次元のいろいろな種類の場に分かれる．$\hat{e}_\mu{}^a$ は重力場，$\hat{e}_\mu{}^i$ はベクトル場，$\hat{e}_\alpha{}^i$ はスカラー場を表す．ただし，D 次元の標準的な形のラグランジアンを得るためには，これらの場そのものではなく，場の再定義をしたものを使わなければならない．そのためには，$\hat{D}$ 次元の多脚場 $\hat{e}_M{}^A$ とその逆行列 $\hat{e}_A{}^M$ を，

$$\hat{e}_M{}^A = \begin{pmatrix} e^\sigma\, e_\mu{}^a & A_\mu{}^\beta\, E_\beta{}^i \\ 0 & E_\alpha{}^i \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_A{}^M = \begin{pmatrix} e^{-\sigma}\, e_a{}^\mu & -e^{-\sigma}\, e_a{}^\nu\, A_\nu{}^\alpha \\ 0 & E_i{}^\alpha \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

---

*2) J. Scherk and J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 61.

とおくとよい．$\hat{D}$ 次元の局所 Lorentz 変換の一部を使って，$\hat{e}_M{}^A$ の行列の左下の成分 $\hat{e}_\alpha{}^a$ がゼロになるようにした．$e_\mu{}^a$, $A_\mu{}^\alpha$, $E_\alpha{}^i$ は, D 次元の座標にだけ依存し，それぞれ，D 次元の多脚場，ベクトル場，スカラー場を表す．$e_a{}^\mu$, $E_i{}^\alpha$ は，それぞれ，$e_\mu{}^a$, $E_\alpha{}^i$ の逆行列である．$e_\mu{}^a$ の前の因子は,

$$e^\sigma = E^{-\frac{1}{D-2}}, \qquad E = \det E_\alpha{}^i \tag{6.7}$$

で定義され，D 次元での重力場のラグランジアンが通常の Einstein 型になるように導入した．この $\hat{D}$ 次元の多脚場からつくられる計量 $\hat{g}_{MN} = \hat{e}_M{}^A \hat{e}_N{}^B \eta_{AB}$ とその逆行列は,

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{MN} &= \begin{pmatrix} e^{2\sigma}\, g_{\mu\nu} + A_\mu{}^\gamma\, A_\nu{}^\delta\, G_{\gamma\delta} & A_\mu{}^\gamma\, G_{\gamma\beta} \\ G_{\alpha\gamma}\, A_\nu{}^\gamma & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \\
\hat{g}^{MN} &= \begin{pmatrix} e^{-2\sigma}\, g^{\mu\nu} & -e^{-2\sigma}\, A^{\mu\beta} \\ -e^{-2\sigma}\, A^{\nu\alpha} & G^{\alpha\beta} + e^{-2\sigma}\, g^{\rho\sigma}\, A_\rho{}^\alpha\, A_\sigma{}^\beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

となる．ここで,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b\, \eta_{ab}, \qquad G_{\alpha\beta} = E_\alpha{}^i\, E_\beta{}^j\, \delta_{ij} \tag{6.9}$$

であり，$g^{\mu\nu}$，$G^{\alpha\beta}$ はその逆行列である．多脚場 (6.6) からつくられるスピン接続の局所 Lorentz 添字での成分 $\hat{\omega}_{ABC} = \hat{e}_A{}^M \hat{\omega}_{MBC}$ は,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{abc} &= e^{-\sigma}\left(\omega_{abc} + \eta_{ab}\,\partial_c\,\sigma - \eta_{ac}\,\partial_b\,\sigma\right), \\
\hat{\omega}_{abi} &= \frac{1}{2}\, e^{-2\sigma}\, F_{ab}{}^\alpha\, E_{\alpha i}, \\
\hat{\omega}_{aij} &= \frac{1}{2}\, e^{-\sigma}\left(E_i{}^\alpha\,\partial_a\, E_{\alpha j} - E_j{}^\alpha\,\partial_a\, E_{\alpha i}\right), \\
\hat{\omega}_{iab} &= -\frac{1}{2}\, e^{-2\sigma}\, F_{ab}{}^\alpha\, E_{\alpha i}, \\
\hat{\omega}_{iaj} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sigma}\left(E_i{}^\alpha\,\partial_a\, E_{\alpha j} + E_j{}^\alpha\,\partial_a\, E_{\alpha i}\right), \\
\hat{\omega}_{ijk} &= 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

となる．$\omega_{\mu ab}$ は D 次元の多脚場 $e_\mu{}^a$ からつくられたスピン接続であり，$F_{\mu\nu}{}^\alpha$ はベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$ の場の強さ

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = 2\,\partial_{[\mu}\, A_{\nu]}{}^\alpha \tag{6.11}$$

である．また，右辺で世界添字 $\mu, \nu, \cdots$ を局所 Lorentz 添字 $a, b, \cdots$ に変えるときは，D 次元の多脚場 $e_\mu{}^a$ を使っている．

ラグランジアン

(6.6) を $\hat{D}$ 次元のラグランジアン (6.5) に代入すれば，D 次元の場に対するラグランジアンが得られる．そのためには，Palatini 恒等式 (1.28) を使うと便利である．ラグランジアン (6.5) にこの恒等式を使い，スピン接続 (6.10) を代

入すると，全微分項を除いて，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \hat{e}\left(\hat{\omega}_A{}^{AC}\,\hat{\omega}_B{}^B{}_C + \hat{\omega}_A{}^{BC}\,\hat{\omega}_{BC}{}^A\right) \\ &= e\,R - \frac{1}{D-2}\,e\,E^{-2}\,\partial_\mu E\,\partial^\mu E + \frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu G^{\alpha\beta}\,\partial^\mu G_{\alpha\beta} \\ &\quad -\frac{1}{4}\,e\,E^{\frac{2}{D-2}}\,F_{\mu\nu}{}^\alpha\,F^{\mu\nu\beta}\,G_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{6.12}$$

が得られる．これを見やすい形にするために，スカラー場を表す行列を

$$E_\alpha{}^i = E^{\frac{1}{d}}\,v_\alpha{}^i, \qquad \det v_\alpha{}^i = 1 \tag{6.13}$$

のように，行列式が 1 の行列 $v_\alpha{}^i$ と行列式を表す因子に分けて書く．(6.9) の $G_{\alpha\beta}$ は，

$$G_{\alpha\beta} = E^{\frac{2}{d}}\,S_{\alpha\beta}, \quad S_{\alpha\beta} = v_\alpha{}^i\,v_\beta{}^j\,\delta_{ij}, \quad \det S_{\alpha\beta} = 1 \tag{6.14}$$

となる．さらに，

$$E = e^{\frac{1}{2}(D-2)da\phi}, \qquad a = \sqrt{\frac{2}{(D-2)d(D+d-2)}} \tag{6.15}$$

とおくと，ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu S^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S_{\alpha\beta} \\ &\quad -\frac{1}{4}\,e\,e^{(D+d-2)a\phi}\,F_{\mu\nu}{}^\alpha\,F^{\mu\nu\beta}\,S_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{6.16}$$

となる．これは，重力場 $g_{\mu\nu}$，$\frac{1}{2}d(d+1)$ 個のスカラー場 ϕ, $S_{\alpha\beta}$，および，d 個のベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$ からなる D 次元の理論のラグランジアンである．スカラー場 $S_{\alpha\beta}$ は非多項式型の運動項をもっている．また，スカラー場はベクトル場の運動項にも現れている．下で見るように，スカラー場 $S_{\alpha\beta}$ は $SL(d,\mathbb{R})/SO(d)$ 非線形シグマ模型で表される．

対称性

高次元の理論の作用は，$\hat{D}$ 次元の一般座標変換と局所 Lorentz 変換

$$\delta\,\hat{e}_M{}^A = \xi^N\,\partial_N\,\hat{e}_M{}^A + \partial_M\,\xi^N\,\hat{e}_N{}^A - \lambda^A{}_B\,\hat{e}_M{}^B \tag{6.17}$$

に対して不変である．D 次元の理論として見た場合，これらの変換がどのような対称性を表しているかを見よう．次元還元と矛盾しないためには，上の変換に対していくつかの条件を課す必要がある．まず，(i) 変換後も場がコンパクト化した次元の座標に依存しないような変換でなければならない．また，D 次元の理論の作用は，$\hat{D}$ 次元のうち D 次元分の積分しかないので，上の変換すべてに対して D 次元作用が不変になるとは限らない．上の変換に対してラグランジアンは，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_M\left(\xi^M\mathcal{L}\right) = \partial_\mu\left(\xi^\mu\mathcal{L}\right) + \partial_\alpha\xi^\alpha\mathcal{L} \tag{6.18}$$

のように変換する．ここで，$\partial_\alpha\mathcal{L} = 0$ を使った．右辺の第 1 項は作用に代入して D 次元積分を実行すると消えるが，第 2 項は残る．したがって，D 次元の作用が不変であるためには，(ii) $\partial_\alpha\xi^\alpha = 0$ が必要である．さらに，(6.6) の $\hat{e}_\alpha{}^a = 0$ が保たれるようにするためには，$\lambda_{ai} = 0$ が必要である．

まず，残りのパラメータ ξ^μ, ξ^α, λ_{ab}, λ_{ij} が，場と同様にコンパクト化した次元の座標に依存しない場合を考えると，上の 2 つの条件 (i), (ii) が満たされていることがわかる．この場合の変換を D 次元の場の変換として書くと，

$$\begin{aligned}
&\delta e_\mu{}^a = \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a - \lambda^a{}_b e_\mu{}^b,\\
&\delta A_\mu{}^\alpha = \xi^\nu\partial_\nu A_\mu{}^\alpha + \partial_\mu\xi^\nu A_\nu{}^\alpha + \partial_\mu\xi^\alpha,\\
&\delta\phi = \xi^\nu\partial_\nu\phi,\\
&\delta v_\alpha{}^i = \xi^\nu\partial_\nu v_\alpha{}^i + v_\alpha{}^j\lambda_j{}^i
\end{aligned} \tag{6.19}$$

となる．ξ^μ, λ_{ab} は，D 次元の一般座標変換と局所 Lorentz 変換を表す．コンパクト化した方向の座標変換のパラメータ ξ^α は，ベクトル場の $U(1)^d$（d 個の $U(1)$ の直積）ゲージ変換になっていることがわかる．λ_{ij} は，スカラー場 $v_\alpha{}^i$ に作用する局所 $SO(d)$ 変換を表している．ラグランジアン (6.16) からつくった D 次元の作用は，これらの局所変換に対して不変である．

コンパクト化した次元の座標の線形な変換 $\xi^\alpha = y^\beta L_\beta{}^\alpha$（$L_\alpha{}^\beta$ は $L_\alpha{}^\alpha = 0$ を満たす定数）も上の 2 つの条件を満たしている．条件 $L_\alpha{}^\alpha = 0$ は，$\partial_\alpha\xi^\alpha = 0$ が成り立つために必要である．この場合の場の変換は，

$$\delta v_\alpha{}^i = L_\alpha{}^\beta v_\beta{}^i, \quad \delta A_\mu{}^\alpha = -A_\mu{}^\beta L_\beta{}^\alpha, \quad \delta(\text{他の場}) = 0 \tag{6.20}$$

となる．これは，大局的な $SL(d,\mathbb{R})$ 変換を表している．

変換 $\xi^\alpha = cy^\alpha$（c は定数）は，条件 $\partial_\alpha\xi^\alpha = 0$ を満たしていないので，D 次元の作用はそれに対して不変ではない．実際，(6.18) から，$\delta\mathcal{L} = dc\mathcal{L}$ となる．しかし，今考えている $\hat{D}$ 次元のラグランジアン (6.5) は，別の変換 $\delta\hat{e}_M{}^A = c'\hat{e}_M{}^A$（$c'$ は定数）に対して，$\delta\mathcal{L} = (D+d-2)c'\mathcal{L}$ のように変換する．したがって，$c' = -dc/(D+d-2)$ として，この 2 つの変換を合成すれば，ラグランジアンは不変である．この合成変換は，

$$\delta\phi = \phi + \frac{2c}{(D+d-2)a}, \quad \delta A_\mu^\alpha = -cA_\mu^\alpha, \quad \delta(\text{他の場}) = 0 \tag{6.21}$$

となる．これは，大局的な $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換を表している．この $GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性の存在はラグランジアン (6.5) の特殊性を使っているので，他のラグランジアンを考えた場合，それが $\hat{D}$ 次元の一般座標変換に対して不変であっても，$GL(1,\mathbb{R})^+$ 不変とは限らない．たとえば，Einstein 項の他に宇宙項をもつ $\hat{D}$ 次元の理論から次元還元によって得られた作用は，$GL(1,\mathbb{R})^+$ 不変ではない．

また，下で見るように，他の種類の場が結合した場合も，作用は必ずしも不変ではない．

$SL(d,\mathbb{R})/SO(d)$ 非線形シグマ模型

行列式が 1 の $d\times d$ 行列で表されるスカラー場 $v_\alpha{}^i$ は群 $SL(d,\mathbb{R})$ の元であり，パラメータ λ_{ij} の局所 $SO(d)$ 変換によって $SO(d)$ 部分群の自由度を取り除けることから，その物理的自由度は商空間 $SL(d,\mathbb{R})/SO(d)$ に値をもつことがわかる．このことから，スカラー場 $v_\alpha{}^i$ は，4.1 節で述べた非線形シグマ模型の定式化によって記述できることが予想できる．実際，これは次のように確かめられる．まず，4.1 節にしたがって，

$$
\begin{aligned}
&v_i{}^\alpha\,\partial_\mu\,v_\alpha{}^j = P_{\mu i}{}^j + Q_{\mu i}{}^j,\\
&P_{\mu ij} = \frac{1}{2}\,(v_i{}^\alpha\,\partial_\mu\,v_{\alpha j} + v_j{}^\alpha\,\partial_\mu\,v_{\alpha i}) = P_{\mu ji},\\
&Q_{\mu ij} = \frac{1}{2}\,(v_i{}^\alpha\,\partial_\mu\,v_{\alpha j} - v_j{}^\alpha\,\partial_\mu\,v_{\alpha i}) = -Q_{\mu ji}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

とおく．$v_i{}^\alpha$ は，$v_\alpha{}^i$ の逆行列である．$Q_{\mu ij}$ は $SO(d)$ Lie 代数の元であり，$P_{\mu ij}$ はそれに直交する部分である．これを使うと，ラグランジアン (6.16) の $S_{\alpha\beta}$ の運動項は，4.1 節の (4.8) のように，

$$
\frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu S^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,e\,\mathrm{tr}\,(P_\mu\,P^\mu) \tag{6.23}
$$

と書き換えることができる．場 $S_{\alpha\beta} = v_\alpha{}^i v_\beta{}^j \delta_{ij}$ は，$v_\alpha{}^i$ からつくった局所 $SO(d)$ 不変な変数であり，$\frac{1}{2}d(d+1)-1$ 個の物理的な自由度だけを表している．以下で見るように，$\hat{D}$ 次元のボソン場だけを扱う場合は，$S_{\alpha\beta}$ だけを使って記述することができるが，フェルミオン場を扱う場合には，$v_\alpha{}^i$ を使う必要がある．この状況は，フェルミオン場を扱う場合には，重力場を，局所 Lorentz 不変な計量 $g_{\mu\nu}$ ではなく，多脚場 $e_\mu{}^a$ で表す必要があるのと同じである．

同様に，スカラー場 ϕ は，自明な商空間 $GL(1,\mathbb{R})^+/1$ に値をもつ非線形シグマ模型によって記述されているとみなすことができる．

上の $P_{\mu ij}, Q_{\mu ij}$ を使うと，スピン接続 (6.10) の一部を，

$$
\begin{aligned}
&\hat{\omega}_{aij} = e^{-\sigma}\,Q_{aij},\\
&\hat{\omega}_{iaj} = -e^{-\sigma}\,P_{aij} + \frac{D-2}{d}\,e^{-\sigma}\,\partial_a\sigma\,\delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

と表すことができる．これは，重力場に結合した他の場の次元還元を考える際に便利な式である．

6.2.2 スカラー場

$\hat{D}$ 次元の重力場に結合した実スカラー場 $\hat{\varphi}$ のラグランジアン

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\hat{e}\,\hat{g}^{MN}\,\partial_M\hat{\varphi}\,\partial_N\hat{\varphi} \tag{6.25}
$$

を考えよう．スカラー場がコンパクト化した次元の座標 y^α に依存しないとして，$\hat{\varphi}(x,y)=\varphi(x)$ とおく．重力場に対して (6.6) を使うと，上のラグランジアンは，

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\,e\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi \tag{6.26}$$

となる．$\hat{e}\hat{g}^{\mu\nu}$ の組み合わせでは，$\hat{D}$ 次元の計量に含まれるスカラー場 E は相殺するため，D 次元でも重力場だけに結合した理論になっている．

6.2.3 Yang–Mills 場

$\hat{D}$ 次元の重力場に結合した Yang–Mills 場 $\hat{A}_M^I$ のラグランジアンは，g をゲージ結合定数として，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2g^2}\,\hat{e}\ \mathrm{tr}\left(\hat{F}_{MN}\,\hat{F}^{MN}\right) \tag{6.27}$$

で与えられる．1.5 節のように Yang–Mills 場を行列に値をもつ場 $\hat{A}_M=-ig\hat{A}_M^I T_I$ で表し，その場の強さを

$$\hat{F}_{MN}=\partial_M\,\hat{A}_N-\partial_N\,\hat{A}_M+[\hat{A}_M,\,\hat{A}_N] \tag{6.28}$$

とした．このラグランジアンは，ゲージ変換

$$\delta\,\hat{A}_M=\hat{D}_M\,v=\partial_M\,v+[\hat{A}_M,\,v] \tag{6.29}$$

に対して不変である．

次元還元によって D 次元のラグランジアンを求めるために，$\hat{A}_M$ はコンパクト化した次元の座標 y^α に依存しないとする．$\hat{A}_M$ の成分を D 次元部分 $\hat{A}_\mu$ と d 次元部分 $\hat{A}_\alpha$ に分けると，それぞれ，D 次元のベクトル場と d 個のスカラー場となる．6.2.1 節で重力場の次元還元の際にみたように，コンパクト化した次元方向の座標変換（ξ^α 変換）は，$\hat{D}$ 次元の重力場から現れたベクトル場 ${A_\mu}^\alpha$ のゲージ変換となった．ゲージ場 $\hat{A}_\mu$ は ξ^α 座標変換で非自明な変換をするので，場の再定義によって ξ^α 変換に対して不変な場を定義すると便利である．このような場の再定義を行うためには，次のようなトリックを使うとよい．まず，$\hat{D}$ 次元の局所 Lorentz 系の成分 $\hat{A}_A=\hat{e}_A{}^M\hat{A}_M$ は，$\hat{D}$ 次元の一般座標変換に対してスカラーであり，また，d 次元の座標に依存しないので，ξ^α 変換に対して不変である．これを使って，D 次元の場 A_μ, A_α を

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e^\sigma\,e_\mu{}^a\,\hat{A}_a=\hat{A}_\mu-A_\mu{}^\alpha\,\hat{A}_\alpha,\\ A_\alpha &\equiv E_i{}^\alpha\,\hat{A}_i=\hat{A}_\alpha \end{aligned} \tag{6.30}$$

と定義する．(6.19) から $e_\mu{}^a$ と $E_\alpha{}^i=e^{\frac{1}{2}(D-2)a\phi}v_\alpha{}^i$ は ξ^α 変換に対して不変なので，A_μ，A_α も不変であることがわかる．$\hat{D}$ 次元の x^μ 方向の一般座標変換から導かれる D 次元の一般座標変換に対しては，これらの場はベクトル場と

スカラー場として変換する．また，$\hat{D}$ 次元のゲージ変換 (6.29) で，変換のパラメータ v が y^α に依存しないとして得られる D 次元の変換は，ゲージ変換

$$\delta A_\mu = D_\mu v, \qquad \delta A_\alpha = [A_\alpha, v] \tag{6.31}$$

となる．ここで，D_μ は (6.30) の A_μ を使った共変微分である．

同様に，ξ^α 変換に対して不変な場の強さを $\hat{F}_{AB} = \hat{e}_A{}^M \hat{e}_B{}^N \hat{F}_{MN}$ から定義し，(6.30) を使うと，

$$\begin{aligned} &e^{2\sigma} e_\mu{}^a e_\nu{}^b \hat{F}_{ab} = F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}{}^\alpha A_\alpha \equiv \tilde{F}_{\mu\nu}, \\ &e^\sigma e_\mu{}^a E_\alpha{}^i \hat{F}_{ai} = D_\mu A_\alpha, \\ &E_\alpha{}^i E_\beta{}^j \hat{F}_{ij} = [A_\alpha, A_\beta] \end{aligned} \tag{6.32}$$

となる．ここで，$F_{\mu\nu}$ は A_μ の場の強さである．これらは，ゲージ変換 (6.31) に対して共変的に変換する．これらを使うと，D 次元のラグランジアンが，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2g^2} \hat{e} \operatorname{tr}\left(\hat{F}_{AB} \hat{F}^{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2g^2} e\, e^{da\phi} \operatorname{tr}\left(\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{g^2} e\, e^{-(D-2)a\phi} \operatorname{tr}\left(D_\mu A_\alpha D^\mu A_\beta\right) S^{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2g^2} e\, e^{-2(D-2)a\phi} \operatorname{tr}\left([A_\alpha, A_\beta][A_\gamma, A_\delta]\right) S^{\alpha\gamma} S^{\beta\delta} \end{aligned} \tag{6.33}$$

と得られる．第 1 項はゲージ場 A_μ に対する運動項で，場の強さ $\tilde{F}_{\mu\nu}$ には (6.32) のように $A_\mu{}^\alpha$ による補正項が加わっている．第 2 項と第 3 項は，スカラー場 A_α の運動項とポテンシャル項である．ポテンシャル項は，$\hat{D}$ 次元の場の強さの中の交換関係の項から来ており，アーベル群の場合は存在しない．このラグランジアンからつくった作用は，D 次元の一般座標変換，ξ^α ゲージ変換，Yang–Mills ゲージ変換 (6.31) に対して不変である．また，重力場の次元還元で現れた大局的な対称性のうち，$SL(d, \mathbb{R})$ は今の場合も存在する．大局的な $GL(1, \mathbb{R})^+$ は，ゲージ群がアーベル群の場合にだけ存在する（6.2.4 節参照）．

スカラー場は，ラグランジアン (6.33) の中のポテンシャルが最小（ゼロ）になるような真空期待値をもつ．ポテンシャルは，行列に値をもつスカラー場の交換子で書けているので，真空期待値は互いに交換する行列で表される．そのような行列は，ゲージ群の Cartan 部分代数の元にとることができる．スカラー場の真空期待値のまわりのゆらぎは，ポテンシャルによって一般に質量を持つが，Cartan 部分代数部分のゆらぎは真空期待値と交換するのでゼロ質量になる．スカラー場が真空期待値をもつと，スカラー場の運動項から Yang–Mills 場の質量項が現れ，Higgs 機構によって Yang–Mills 場もゼロでない質量をもつことになる．ただし，Cartan 部分代数に対応するゲージ場は，スカラー場の真空期待値を表す行列と交換するため，質量をもたない．（特別な真空期待値に対しては，例外的にさらに多くのゼロ質量の場が現れる．）したがって，スカ

ラー場の一般的な真空期待値に対してゼロ質量になる場だけに興味がある場合は，$\hat{D}$ 次元のゲージ場のうち Cartan 部分代数の部分だけを考えればよい．それらは，ゲージ群の階数（rank）の個数の $U(1)$ ゲージ場によって表される．

6.2.4 反対称テンソル場

$\hat{D}$ 次元の重力場に結合した 2 階の反対称テンソル場 $\hat{B}_{MN}$ を考えよう．より高階の反対称テンソル場の場合も同様に扱うことができる．$\hat{D}$ 次元のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{12}\,\hat{e}\,\hat{F}_{MNP}\,\hat{F}^{MNP} \tag{6.34}$$

であり，場の強さは，

$$\hat{F}_{MNP} = 3\,\partial_{[M}\,\hat{B}_{NP]} \tag{6.35}$$

で与えられる．この場の強さとラグランジアンは，反対称テンソル場のゲージ変換

$$\delta\,\hat{B}_{MN} = 2\,\partial_{[M}\,\hat{\zeta}_{N]} \tag{6.36}$$

に対して不変である．

D 次元のラグランジアンを求めるために，$\hat{B}_{MN}$ はコンパクト化した次元の座標 y^α に依存しないとする．さらに，Yang–Mills 場の場合と同様に，局所 Lorentz 添字の成分 $\hat{B}_{AB} = \hat{e}_A{}^M \hat{e}_B{}^N \hat{B}_{MN}$ から，ξ^α 変換に対して不変な D 次元の場

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &\equiv e^{2\sigma}\,e_\mu{}^a\,e_\nu{}^b\,\hat{B}_{ab} = \hat{B}_{\mu\nu} + 2\,A_{[\mu}{}^\alpha\,\hat{B}_{\nu]\alpha} + A_\mu{}^\alpha\,A_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta},\\
B_{\mu\alpha} &\equiv e^{\sigma}\,e_\mu{}^a\,E_\alpha{}^i\,\hat{B}_{ai} = \hat{B}_{\mu\alpha} - A_\mu{}^\beta\,\hat{B}_{\beta\alpha},\\
B_{\alpha\beta} &\equiv E_\alpha{}^i\,E_\beta{}^j\,\hat{B}_{ij} = \hat{B}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

を定義する．場の強さについても，同様に ξ^α 不変な量

$$\begin{aligned}
e^{3\sigma}\,e_\mu{}^a\,e_\nu{}^b\,e_\rho{}^c\,\hat{F}_{abc} &= F_{\mu\nu\rho} - 3\,F_{[\mu\nu}{}^\alpha\,B_{\rho]\alpha} \equiv \tilde{F}_{\mu\nu\rho},\\
e^{2\sigma}\,e_\mu{}^a\,e_\nu{}^b\,E_\alpha{}^i\,\hat{F}_{abi} &= F_{\mu\nu\alpha} + F_{\mu\nu}{}^\beta\,B_{\beta\alpha} \equiv \tilde{F}_{\mu\nu\alpha},\\
e^{\sigma}\,e_\mu{}^a\,E_\alpha{}^i\,E_\beta{}^j\,\hat{F}_{aij} &= \partial_\mu\,B_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

を定義する．ここで，

$$F_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho]}, \qquad F_{\mu\nu\alpha} = 2\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu]\alpha} \tag{6.39}$$

とおいた．(この $F_{\mu\nu\alpha}$ は，$\hat{D}$ 次元の重力場から現れる $F_{\mu\nu}{}^\alpha = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^\alpha$ とは別のものであることに注意せよ.) これらの量を使うと，ラグランジアンは，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{12}\,\hat{e}\,\hat{F}_{ABC}\,\hat{F}^{ABC} \\
&= -\frac{1}{12}\,e\,e^{2da\phi}\,\tilde{F}_{\mu\nu\rho}\,\tilde{F}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}\,e\,e^{-(D-d-2)a\phi}\,\tilde{F}_{\mu\nu\alpha}\,\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{\beta}\,S^{\alpha\beta} \\
&\quad -\frac{1}{4}\,e\,e^{-2(D-2)a\phi}\,\partial_\mu A_{\alpha\beta}\,\partial^\mu A_{\gamma\delta}\,S^{\alpha\gamma}\,S^{\beta\delta}
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

となる．$\hat{D}$ 次元の反対称テンソル場 $\hat{B}_{MN}$ の理論から，D 次元の反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$, d 個のベクトル場 $B_{\mu\alpha}$, $\frac{1}{2}d(d-1)$ 個のスカラー場 $B_{\alpha\beta}$ の理論が得られたことになる．

このラグランジアンを D 次元積分して得られる作用は，$\hat{D}$ 次元の一般座標変換から得られる D 次元の一般座標変換と ξ^α ゲージ変換に対して不変である．さらに，$\hat{D}$ 次元のゲージ変換 (6.36) で，変換のパラメータ $\hat{\zeta}_M$ が y^α によらないとした場合の変換

$$
\begin{aligned}
\delta\,B_{\mu\nu} &= 2\,\partial_{[\mu}\,\zeta_{\nu]} + F_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,\zeta_\alpha, \\
\delta\,B_{\mu\alpha} &= \partial_\mu\,\zeta_\alpha, \\
\delta\,B_{\alpha\beta} &= 0
\end{aligned}
\tag{6.41}
$$

に対しても不変である．ここで，$\hat{\zeta}_A = \hat{e}_A{}^M\hat{\zeta}_M$ から，$\zeta_\mu = e^\sigma e_\mu{}^a\hat{\zeta}_a = \hat{\zeta}_\mu - A_\mu{}^\alpha\hat{\zeta}_\alpha$, $\zeta_\alpha = E_\alpha{}^i\hat{\zeta}_i = \hat{\zeta}_\alpha$ によって定義した変換のパラメータを使った．ζ_α の変換はベクトル場 $B_{\mu\alpha}$ の $U(1)^d$ ゲージ変換を表し，ζ_μ は反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換を表している．$U(1)^d$ 変換に対しては，$B_{\mu\nu}$ も変換していることに注意せよ．

ラグランジアン (6.40) は，重力場の次元還元で現れた大局的な $SL(d,\mathbb{R})$ 対称性と $GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性をもつ．$GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換は，(6.21), および,

$$
\begin{aligned}
\delta\,B_{\mu\nu} &= -\frac{2d}{D+d-2}\,c\,B_{\mu\nu}, \\
\delta\,B_{\mu\alpha} &= \frac{D-d-2}{D+d-2}\,c\,B_{\mu\alpha}, \\
\delta\,B_{\alpha\beta} &= \frac{2D-4}{D+d-2}\,c\,B_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

によって与えられる．さらに，ゲージ変換 (6.36) で，変換のパラメータが $\hat{\zeta}_\mu = -\zeta_{\mu\alpha}y^\alpha$, $\hat{\zeta}_\alpha = -\frac{1}{2}\zeta_{\alpha\beta}y^\beta$ （$\zeta_{\mu\alpha}$, $\zeta_{\alpha\beta} = -\zeta_{\beta\alpha}$ は定数）のように y^α の 1 次式である場合から得られる大局的変換

$$
\begin{aligned}
\delta\,B_{\mu\nu} &= 2\,A_{[\mu}{}^{\alpha}\,\zeta_{\nu]\alpha} + A_\mu{}^\alpha\,A_\nu{}^\beta\,\zeta_{\alpha\beta}, \\
\delta\,B_{\mu\alpha} &= \zeta_{\mu\alpha} + \zeta_{\alpha\beta}\,A_\mu{}^\beta, \\
\delta\,B_{\alpha\beta} &= \zeta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

に対しても不変である．$\zeta_{\mu\alpha}, \zeta_{\alpha\beta}$ の変換は，それぞれ，$B_{\mu\alpha}, B_{\alpha\beta}$ の定数シフトを含む変換である．

ここでは，D 次元の場として，ξ^α 変換に対して不変な (6.37) を使ったが，ξ^α

変換不変ではない別の場の定義を使ったほうが便利な場合もある．第 7 章で見るように，超重力理論の次元還元で現れる非コンパクト対称性を明白な形にするためには，別の定義を使ったほうがよい．

6.2.5 スピノール場

スピノール場 $\hat{\psi}$ の次元還元を議論するには，まず，$\hat{D}$ 次元のガンマ行列 Γ^A と D 次元のガンマ行列 γ^a の関係を知る必要がある．D と d が奇数か偶数かに分けて考えると，この関係は，

(1) $D=$ 奇数，$d=$ 偶数の場合

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes \bar{\gamma}', \quad \Gamma^i = \mathbf{1} \otimes \gamma^i \tag{6.44}$$

(2) $D=$ 偶数，$d=$ 奇数の場合

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes \mathbf{1}, \quad \Gamma^i = \bar{\gamma} \otimes \gamma^i \tag{6.45}$$

(3) $D=$ 偶数，$d=$ 偶数の場合

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes \mathbf{1}, \quad \Gamma^i = \bar{\gamma} \otimes \gamma^i, \quad \bar{\Gamma} = \bar{\gamma} \otimes \bar{\gamma}' \tag{6.46}$$

(4) $D=$ 奇数，$d=$ 奇数の場合

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_1, \quad \Gamma^i = \mathbf{1} \otimes \gamma^i \otimes \sigma_2, \quad \bar{\Gamma} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_3 \tag{6.47}$$

と表せる．ここで，右辺の初めの因子の γ^a と $\bar{\gamma}$ は，$SO(1, D-1)$ の $2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$ ガンマ行列とそのカイラリティ行列であり，2 番目の因子の γ^i と $\bar{\gamma}'$ は，$SO(d)$ の $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$ ガンマ行列とカイラリティ行列である（3.1 節参照）．(4) の場合の 3 番目の因子は，2×2 Pauli 行列である．この場合だけは，$2^{[\hat{D}/2]} = 2^{[D/2]} \times 2^{[d/2]} \times 2$ なので，この 3 番目の因子が必要である．$\hat{D}=$ 偶数の (3), (4) の場合には，$\hat{D}$ 次元のカイラリティ行列 $\bar{\Gamma}$ も与えた．また，$\hat{D}$ 次元の荷電共役行列 $\hat{C}$ も，D 次元と d 次元の荷電共役行列 C と C' を使って表すことができる．このように表された Γ^A が，$SO(1, \hat{D}-1)$ のガンマ行列の反交換関係を満たすことは，$SO(1, D-1)$ と $SO(d)$ のガンマ行列の反交換関係を使って簡単に確かめることができる．

このガンマ行列の表現では，$\hat{D}$ 次元のスピノール場は，$SO(1, D-1)$ スピノール添字 α と $SO(d)$ スピノール添字 α' をもった場 $\hat{\psi}_{\alpha\alpha'}$（(4) の場合は，2 つのそのような場）によって表される．したがって，$\hat{D}$ 次元の 1 個の Dirac スピノール場は，(1)–(3) の場合は $2^{[d/2]}$ 個の，(4) の場合は $2^{[d/2]} \times 2$ 個の D 次元の Dirac スピノール場を表すことになる．

このようなガンマ行列の表現を使って，$\hat{D}$ 次元の重力場に結合した Dirac スピノール場 $\hat{\psi}$ の次元還元を考えよう．$\hat{D}$ 次元のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\hat{e}\,\bar{\hat{\psi}}\,\hat{\Gamma}^M\,\hat{D}_M\,\hat{\psi} \tag{6.48}$$

である．D 次元のラグランジアンを求めるためには，スピノール場 $\hat{\psi}$ がコンパクト化された次元の座標に依存しないとする．また，D 次元の標準的な形の運動項を得るために，

$$\hat{\psi} = e^{\frac{1}{4}da\phi}\,\psi \tag{6.49}$$

とおく．これを (6.48) に代入し，スピン接続 (6.10), (6.24) を使うと，D 次元のラグランジアン

$$\mathcal{L} = -e\,\bar{\psi}\,\Gamma^\mu\,D_\mu\,\psi - \frac{1}{8}\,e\,e^{\frac{1}{2}(D+d-2)a\phi}\,\bar{\psi}\,\Gamma^{\mu\nu}\,\Gamma_i\,\psi\,F_{\mu\nu}{}^\alpha\,v_\alpha{}^i \tag{6.50}$$

が得られる．Dirac 共役は，$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\Gamma^0$ のように $\hat{D}$ 次元のガンマ行列を使って定義されている．$\hat{D}$ 次元のガンマ行列 Γ^A は，(6.44)–(6.47) によって，D 次元のガンマ行列と $SO(d)$ のガンマ行列を使って書き換えることができる．共変微分は，

$$D_\mu\,\psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\,\gamma^{ab} + \frac{1}{4}\,Q_{\mu ij}\,\gamma^{ij}\right)\psi \tag{6.51}$$

であり，スピン接続 $\omega_{\mu ab}$ の他に，局所 $SO(d)$ 変換の接続 $Q_{\mu ij}$ を含んでいる．(6.50) の第 2 項は，スピノール場の双 1 次形式とベクトル場の場の強さの積の形をした Pauli 項である．

このラグランジアンから得られる作用は，D 次元の一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ξ^α ゲージ変換，局所 $SO(d)$ 変換に対して不変である．局所 $SO(d)$ 変換に対しては，スピノール場は，

$$\delta\,\psi = -\frac{1}{4}\,\lambda_{ij}\,\gamma^{ij}\,\psi \tag{6.52}$$

のようにスピノール表現によって変換する．また，このラグランジアンは大局的な $SL(d,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対しても不変であるが，スピノール場はこれらの大局的な変換に対しては変換しない．

6.2.6 Rarita–Schwinger 場

$\hat{D}$ 次元の重力場に結合した Rarita–Schwinger 場 $\hat{\psi}_M$ のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\hat{e}\,\bar{\hat{\psi}}_M\,\hat{\Gamma}^{MNP}\,\hat{D}_N\,\hat{\psi}_P \tag{6.53}$$

である．Rarita–Schwinger 場は Dirac スピノールであるとした．D 次元の理論を得るために，$\hat{D}$ 次元の場 $\hat{\psi}_A = \hat{e}_A{}^M\hat{\psi}_M$ と D 次元の場 ψ_μ, ψ_i, ψ の関係を

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_a &= e^{\frac{1}{4}da\phi}\left(e_a{}^\mu\,\psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}\,d\,a\,\Gamma_a\,\psi\right),\\ \hat{\psi}_i &= e^{\frac{1}{4}da\phi}\left(\psi_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(D-2)\,a\,\Gamma_i\,\psi\right) \quad (\gamma^i\,\psi_i = 0)\end{aligned} \tag{6.54}$$

とする．下の式では，$\hat{\psi}_i$ をガンマ・トレースがゼロ $(\gamma^i \psi_i = 0)$ の部分とそれ以外の部分に分けている．また，上の式の第 2 項は，D 次元のラグランジアンの運動項に ψ_μ と ψ の交差項が現れないように付け加えた．

この式をラグランジアン (6.53) に代入すると，D 次元のラグランジアンが得られる．計算の際は，局所 Lorentz 系の成分 $\hat{\psi}_A$, $\hat{\omega}_{ABC}$ などを使うと見通しがよい．得られる D 次元のラグランジアンは，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -e\,\bar{\psi}_\mu\,\Gamma^{\mu\nu\rho}\,D_\nu\,\psi_\rho - e\,\bar{\psi}^i\,\Gamma^\mu\,D_\mu\,\psi_i - e\,\bar{\psi}\,\Gamma^\mu\,D_\mu\,\psi \\
& + \frac{1}{2}\,e\left(\bar{\psi}_\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^\mu\,\Gamma^i\,\psi^j - \bar{\psi}^i\,\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^j\,\psi_\mu\right)P_{\nu ij} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e\left(\bar{\psi}_\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^\mu\,\psi + \bar{\psi}\,\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\psi_\mu\right)\partial_\nu\phi \\
& + \frac{1}{8}\,e\,e^{\frac{1}{2}(\hat{D}-2)a\phi}\Big[\bar{\psi}^\mu\,\Gamma_{[\mu}\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma_{\nu]}\,\Gamma_i\,\psi^\nu - \bar{\psi}_\mu\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma^\mu\,\psi_i \\
& - \bar{\psi}_i\,\Gamma^\mu\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{D}-2)\,a\left(\bar{\psi}_\mu\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma^\mu\,\Gamma_i\,\psi + \bar{\psi}\,\Gamma^\mu\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma_i\,\psi_\mu\right) \\
& - \bar{\psi}_j\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma_i\,\psi^j + \sqrt{2}\,(\hat{D}-2)\,a\left(\bar{\psi}_i\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\psi + \bar{\psi}\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\psi_i\right) \\
& - \left(1 - \frac{2}{D-2} - \frac{2}{d}\right)\bar{\psi}\,\Gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma_i\,\psi\Big]F_{\rho\sigma}{}^\alpha v_\alpha{}^i
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

となる．ここで，共変微分は D 次元のスピン接続 $\omega_{\mu ab}$ の他に局所 $SO(d)$ 変換の接続 $Q_{\mu ij}$ も含み，ψ_μ, ψ に対しては (6.51) の形で，ψ_i に対しては

$$
D_\mu\,\psi_i = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_\mu{}^{ab}\,\gamma_{ab} + \frac{1}{4}\,Q_\mu{}^{ij}\,\gamma_{ij}\right)\psi_i + Q_{\mu i}{}^j\,\psi_j \tag{6.56}
$$

で与えられる．また，Dirac 共役は，$\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu^\dagger i\Gamma^0$ のように $\hat{D}$ 次元のガンマ行列を使って定義されている．スピノール場のときと同様に，$\hat{D}$ 次元のガンマ行列 Γ^A を，(6.44)–(6.47) によって，D 次元のガンマ行列と $SO(d)$ のガンマ行列を使って書き換えることができる．このラグランジアンは，運動項の他に，フェルミオン場の双 1 次形式とスカラー場の微分 $P_{\mu ij}$, $\partial_\mu\phi$ やベクトル場の場の強さ $F_{\mu\nu}{}^\alpha$ の積の形の相互作用項をもっている．これらの相互作用項は，ガンマ行列の構造も含めて，第 5 章で述べた高次元の超重力理論と似た形をしている．

このラグランジアンから得られる作用は，D 次元の一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ξ^α ゲージ変換，局所 $SO(d)$ 変換に対して不変である．また，大局的な $SL(d,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対しても不変である．3 種類のフェルミオン場 ψ_μ, ψ_i, ψ は，大局的な $SL(d,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対しては変換しない．局所的な $SO(d)$ 変換に対しては，ψ_μ と ψ は (6.52) のようにスピノール表現によって変換し，ψ_i は

$$
\delta\,\psi_i = -\frac{1}{4}\,\lambda_{jk}\,\gamma^{jk}\,\psi_i - \lambda_i{}^j\,\psi_j \tag{6.57}
$$

のように変換する．

6.3 Scherk–Schwarz 還元

理論が大局的な対称性をもっている場合に，それを利用して，より一般的な次元還元を考えることができる．この場合，パラメータを含んだ低次元の理論が得られる．この方法は，**Scherk–Schwarz 還元**[*3)]（Scherk–Schwarz reduction）とよばれる．

通常の次元還元では高次元の場がコンパクト化した次元の座標 y^α に依存しないと仮定するが，Scherk–Schwarz 還元では場に対称性変換の形の y^α 依存性をもたせる．理論は大局的変換に対して不変なので，このように変換のパラメータに座標依存性をもたせると，ラグランジアン（または，場の方程式）は，パラメータの微分を含んだ項だけ余分な項が現れる．座標 y^α の依存性を適当な形にとると，得られるラグランジアン（または，場の方程式）は y^α に依存しなくなり，D 次元の理論が得られる．このような理論は，通常の次元還元によって得られる理論を変形した理論とみることができる．以下では，いくつかの例で，この方法を具体的に見ていこう．

例 1：複素スカラー場の $U(1)$ 対称性

簡単な例として，$D+1$ 次元の複素スカラー場の理論

$$\mathcal{L} = -\hat{e}\,\hat{g}^{MN}\,\partial_M\hat{\varphi}^*\,\partial_N\hat{\varphi} \tag{6.58}$$

を，D 次元に次元還元することを考えよう．D 次元の座標を x^μ $(\mu = 0,1,\cdots,D-1)$, コンパクト化された 1 次元の座標を y とする．このラグランジアンは，大局的な位相変換 $\varphi(x) \to e^{i\theta}\varphi(x)$ に対して不変である．そこで，位相変換の形の y 依存性をもつ

$$\hat{\varphi}(x,y) = e^{igy}\,\varphi(x) \tag{6.59}$$

を仮定する．ここで，定数パラメータ g を導入した．重力場については，通常の形 (6.6) を使う．これらをラグランジアンに代入すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {}& -e\,g^{\mu\nu}\,(\partial_\mu\varphi^* + i\,g\,A_\mu\varphi^*)\,(\partial_\nu\varphi - i\,g\,A_\nu\varphi) \\ & -g^2\,e\,e^{-(D-1)a\phi}\,\varphi^*\,\varphi\end{aligned} \tag{6.60}$$

が得られる．$D+1$ 次元の重力場から現れたベクトル場 A_μ が，結合定数 g のミニマル結合をしていることがわかる．また，$D+1$ 次元の重力場から現れたスカラー場 ϕ を含み g^2 に比例したポテンシャル項も生じている．

(6.19) でみたように，ベクトル場 A_μ のゲージ変換は，コンパクト化した方向の一般座標変換 $\xi^y(x)$ から得られる．この変換に対する $\varphi(x)$ の変換は，

---

*3) J. Scherk and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 60; *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 61.

$\delta\hat{\varphi} = \xi^y \partial_y \hat{\varphi}$ から，

$$\delta\,\varphi(x) = i\,g\,\xi^y(x)\,\varphi(x) \tag{6.61}$$

となり，局所 $U(1)$ 変換になっていることがわかる．したがって，この場合の Scherk–Schwarz 還元は，高次元の重力場から現れるベクトル場を使って，大局的な $U(1)$ 対称性を局所的な対称性にする（ゲージ化する）方法であるとみることができる．

例 2：Dirac スピノール場の $U(1)$ 対称性

同様に，大局的 $U(1)$ 対称性をもつ $D+1$ 次元の Dirac スピノール場の理論

$$\mathcal{L} = -\hat{e}\,\bar{\hat{\psi}}\,\hat{\Gamma}^M\,\hat{D}_M\hat{\psi} \tag{6.62}$$

で，(6.59) のような場 $\hat{\psi}$ の y 依存性を仮定すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-e\,\bar{\psi}\,\Gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\,\Gamma^{ab} - i\,g\,A_\mu\right)\psi \\ &-i\,g\,e\,e^{-\frac{1}{2}(D-1)a\phi}\,\bar{\psi}\,\Gamma^{D-1}\,\psi + \cdots\end{aligned} \tag{6.63}$$

が得られる．“$\cdots$” は，通常の次元還元 (6.50) でも現れる Pauli 項を表す．ベクトル場 A_μ とのミニマル結合の他に，スカラー場 ϕ との Yukawa 結合が生じていることがわかる．

例 3：場の方程式の対称性

上の 2 つの例では，大局的な対称性はラグランジアンの不変性であった．これに対して，ラグランジアンは不変ではないが，それから導かれる場の方程式が不変であるような変換を使って Scherk–Schwarz 還元を行うこともできる[*4)]．例として，$D+1$ 次元の重力場の理論

$$\mathcal{L} = \hat{e}\,\hat{R} \tag{6.64}$$

を考えよう．このラグランジアンは，重力場の大局的変換 $\hat{e}_M{}^A \to \lambda\hat{e}_M{}^A$ に対して，$\mathcal{L} \to \lambda^{D-1}\mathcal{L}$ のようにスケールし，不変ではない．しかし，場の方程式はこの変換に対して不変である．この変換の形の y 依存性を含む

$$\hat{e}_M{}^A(x,y) = e^{my}\,\tilde{e}_M{}^A(x) \tag{6.65}$$

を仮定し，$\tilde{e}_M{}^A(x)$ を (6.6) のように D 次元の場に分解する．m は定数である．これを $D+1$ 次元の場の方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}&R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,R - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}\partial_\rho\phi\,\partial^\rho\phi \\ &\qquad + \frac{1}{2}(D-1)(D-2)\,m^2\,e^{-(D-1)a\phi}\,g_{\mu\nu} = 0, \\ &D_\mu\,\partial^\mu\phi = 0\end{aligned} \tag{6.66}$$

---

*4) I.V. Lavrinenko, H. Lü and C.N. Pope, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 2239.

が得られる．簡単のため，ベクトル場 A_μ はゼロとおいた．通常の次元還元の場合に比べて，Einstein 方程式に m^2 に比例したスカラー場に依存した項が付け加わっている．

場の方程式の対称性を使った Scherk–Schwarz 還元については，以下のような注意すべき点がある．まず，正しい場の方程式を求めるには，上で行ったように，(6.65) を，高次元のラグランジアンではなく，場の方程式に代入する必要があることである．次元還元の式 (6.65) をラグランジアン (6.64) に代入すると，

$$\mathcal{L} = e^{(D-1)my}\, e\left[R - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi - D(D-1)\, m^2\, e^{-(D-1)a\phi}\right] \tag{6.67}$$

が得られるが，このラグランジアンから場の方程式を求めると，(6.66) と異なった方程式が得られる．正しい場の方程式は，$D+1$ 次元の場の方程式から得られた (6.66) である．もう一つの注意点は，場の方程式 (6.66) を変分原理によって導くような D 次元のラグランジアンが存在しないことである．実際，もし (6.66) の 2 つの方程式を導くラグランジアンが存在したとすれば，初めの方程式は，ラグランジアンに $ee^{-(D-1)a\phi}$ に比例したスカラー場のポテンシャル項があることを意味するが，2 番目の方程式は，ポテンシャル項がないことを意味し，矛盾する．

このようなことが起こる理由を考えてみよう．そのために，(6.65) ではなく，y 依存性を残した

$$\hat{e}_M{}^A(x,y) = e^{my}\, \tilde{e}_M{}^A(x,y) \tag{6.68}$$

の形を考え，$\tilde{e}_M{}^A$ を (6.6) のように D 次元の場に分解する．したがって，D 次元の場 $e_\mu{}^a(x,y)$, $\phi(x,y)$（簡単のため，$A_\mu(x,y)=0$ とする．）は，y にも依存している．これは単なる場の再定義（変数変換）なので，これを $D+1$ 次元のラグランジアンに代入して場について変分すれば，正しい場の方程式が得られる．$D+1$ 次元のラグランジアンをこれらの場で表すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = e^{(D-1)my}\Big[&e\,R - \frac{1}{2}e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - 2e^{-(D-1)a\phi}\,\partial_y^2\, e + D\,a\,e\,e^{-(D-1)a\phi}\,\partial_y^2\phi \\ &-2\,m\,D\,\partial_y(e\,e^{-(D-1)a\phi}) - D(D-1)\,m^2\,e\,e^{-(D-1)a\phi} + \cdots\Big]\end{aligned} \tag{6.69}$$

となる．ここで，“$\cdots$” は ∂_y が作用した場を 2 つ含む項を表す．たとえば，$(\partial_y\phi)^2$ や $\partial_y e \partial_y \phi$ のような項である．このラグランジアンを $D+1$ 次元積分して得られる $D+1$ 次元の作用を場について変分して場の方程式を求め，その後で場 $e_\mu{}^a$, ϕ の y 依存性を落とすと，正しい場の方程式 (6.66) が得られる．

(6.69) の中の y 微分が作用した場を変分するときは部分積分を行うが，その

とき全体にかかっている因子 $e^{(D-1)my}$ があるため m に比例したゼロでない寄与がある．ラグランジアンに (6.65) を代入してしまうと，(6.67) のように場の y 微分を含んだ項が現れず，このような場の方程式への寄与を落としてしまうことになる．そのため，正しい場の方程式が得られない．上の例 1 や例 2 のようにラグランジアンが不変である場合は，$e^{(D-1)m\phi}$ のような因子が現れないため，このような問題は起こらない．

また，∂_y を含む項の変分では，∂_y の作用している場を変分したときだけ場の方程式に寄与がある．たとえば，$e^{-(D-1)a\phi}\partial_y^2 e$ の項を変分する場合，e の変分からは場の方程式にゼロでない寄与があるが，ϕ の変分からの寄与は場の y 依存性を落としたときゼロになる．このため，場の方程式を D 次元のラグランジアンの変分から導くことはできない．

このように，場の方程式の対称性を使って Scherk–Schwarz 還元を行うには，(6.65) を，ラグランジアンではなく，場の方程式に代入する必要がある．ラグランジアンを使う場合は，(6.68) のように場の y 依存性を残したままの場をラグランジアンに代入し，場の方程式を求めた後で y の依存性を落とさなければならない．その際は，∂_y が作用した場を 2 つ含む項（(6.69) の "$\cdots$" の項）の場の方程式への寄与は，場の y 微分を含んでいるので，y 依存性を落とした後消える．したがって，∂_y を含まない項と，1 つの場だけに ∂_y や ∂_y^2 が作用している項だけを考えればよい．

第 5 章でみたように，高次元の超重力理論はいろいろな大局的対称性をもっているので，それを使った Scherk–Schwarz 還元を行うことにより，パラメータを含んだ低次元の超重力理論を構成することができる．9.4.2 節では，$D = 11$, $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論の Scherk–Schwarz 還元によって，ゲージ化された $D = 10$, $\mathcal{N} = (1, 1)$ 超重力理論を構成する．

第 7 章
超重力理論の次元還元

第 6 章の結果を使って，11 次元と 10 次元の超重力理論の次元還元について議論する．次元還元によって得られる低次元の理論は，大局的な非コンパクト対称性をもっている．この対称性は，一般には，重力場だけを次元還元した場合の $SL(d,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな群で表される．

7.1 $D = 11, \mathcal{N} = 1$ 超重力理論の次元還元

5.2 節で述べた $\hat{D} = 11, \mathcal{N} = 1$ 超重力理論の次元還元を考えよう．次元還元では超対称性の個数は保たれるので，D 次元で得られる理論は最大の超対称性をもつ極大超重力理論である．簡単のため，ボソン場についてだけ考える．含まれているボソン場は，重力場 $\hat{e}_M{}^A$ と 3 階反対称テンソル場 $\hat{B}_{MNP}$ である．ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \hat{e}\,\hat{R} - \frac{1}{48}\,\hat{e}\,\hat{F}_{MNPQ}\,\hat{F}^{MNPQ} - \frac{1}{144^2}\,\epsilon^{M_1\cdots M_{11}}\,\hat{F}_{M_1\cdots M_4}\,\hat{F}_{M_5\cdots M_8}\,\hat{B}_{M_9 M_{10} M_{11}} \tag{7.1}$$

であり，反対称テンソル場の場の強さは，

$$\hat{F}_{MNPQ} = 4\,\partial_{[M}\,\hat{B}_{NPQ]} \tag{7.2}$$

で与えられる．このラグランジアンからつくった作用は，一般座標変換の他に，反対称テンソル場のゲージ変換

$$\delta_g\,\hat{B}_{MNP} = 3\,\partial_{[M}\,\hat{\zeta}_{NP]} \tag{7.3}$$

に対して不変である．

6.2.1 節で見たように，$\hat{D}$ 次元の重力場から得られる D 次元の場は，重力場 $e_\mu{}^a$，d 個のベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$，$\frac{1}{2}d(d+1)$ 個のスカラー場 ϕ，$S_{\alpha\beta}$ であり，D

次元のラグランジアンは，(6.16) になる．$\hat{D}$ 次元の 3 階反対称テンソル場からは，6.2.4 節の 2 階反対称テンソル場の場合と同様にして，1 個の 3 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}$，d 個の 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\alpha}$，$\frac{1}{2}d(d-1)$ 個のベクトル場 $B_{\mu\alpha\beta}$，$\frac{1}{6}d(d-1)(d-2)$ 個のスカラー場 $B_{\alpha\beta\gamma}$ が得られる．これらの場と $\hat{B}_{MNP}$ との関係は，下で各 D について議論するときに与える．ただし，スカラー場については，どの D の場合も，

$$B_{\alpha\beta\gamma} = \hat{B}_{\alpha\beta\gamma} \tag{7.4}$$

とする．コンパクト化した次元方向の座標変換（ξ^α 変換）に対して不変な場の強さを，6.2.4 節のように $\hat{F}_{ABCD}$ から，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= e^{4\sigma}\, e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b\, e_\rho{}^c\, e_\sigma{}^d\, \hat{F}_{abcd}, \\
F_{\mu\nu\rho\alpha} &= e^{3\sigma}\, e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b\, e_\rho{}^c\, E_\alpha{}^i\, \hat{F}_{abci}, \\
F_{\mu\nu\alpha\beta} &= e^{2\sigma}\, e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b\, E_\alpha{}^i\, E_\beta{}^j\, \hat{F}_{abij}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

と定義する．これらの場を使うと，D 次元のラグランジアン

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = e\,R &- \frac{1}{2}\, e\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu S^{\alpha\beta}\, \partial^\mu S_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\, e\, e^{9a\phi} S_{\alpha\beta}\, F_{\mu\nu}{}^\alpha\, F^{\mu\nu\beta} \\
&- \frac{1}{48}\, e\, e^{3da\phi}\, F_{\mu\nu\rho\sigma}\, F^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{12}\, e\, e^{3(d-3)a\phi}\, S^{\alpha\beta}\, F_{\mu\nu\rho\alpha}\, F^{\mu\nu\rho}{}_\beta \\
&- \frac{1}{8}\, e\, e^{3(d-6)a\phi}\, S^{\alpha\gamma}\, S^{\beta\delta}\, F_{\mu\nu\alpha\beta}\, F^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} \\
&- \frac{1}{12}\, e\, e^{3(d-9)a\phi}\, S^{\alpha\delta}\, S^{\beta\varepsilon}\, S^{\gamma\eta}\, \partial_\mu B_{\alpha\beta\gamma}\, \partial^\mu B_{\delta\varepsilon\eta} \\
&- \frac{1}{144^2}\, \epsilon^{M_1\cdots M_{11}}\, \hat{F}_{M_1\cdots M_4}\, \hat{F}_{M_5\cdots M_8}\, \hat{B}_{M_9 M_{10} M_{11}}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

が得られる．定数 a は，(6.15) で $D = 11 - d$ とおいたものである．

このラグランジアンからつくった作用は，D 次元の一般座標変換と ξ^α ゲージ変換に対して不変である．また，ゲージ変換 (7.3) から 6.2.4 節の (6.41) と同様に導かれる D 次元のゲージ変換に対しても不変である．さらに，6.2.1 節で議論した大局的 $SL(d,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性ももつ．実は，$D \leq 8$ の理論は，この対称性を含むより大きな大局的対称性をもっている．この拡大された対称性は，表 4.1 の群 G である．たとえば，$D = 4$ の場合には，$E_{7(+7)}$ という非コンパクトな対称性をもつ．このような大きな対称性は，ラグランジアンの形 (7.6) からは一見明らかではないが，それを書き直すことによって対称性が明白な形にすることができる．以下では，D 次元の理論のもつ大局的対称性について，各 D ごとに議論する．

7.1.1 $D = 10$ 理論

$D = 10$ への次元還元では，5.3 節で述べた $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論が得られる．この場合は $d = 1$ で，α, β などの添字は 1 つの値しかとらないので，

表 7.1　$D=9$ 理論のボソン場.

[redacted]							
	1	1	3	2	1	2	1
	0	1	0	$-\frac{3}{2\sqrt{7}}$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	$\frac{1}{2\sqrt{7}}$	$-\frac{1}{\sqrt{7}}$

$B_{\mu\alpha\beta}=0$, $B_{\alpha\beta\gamma}=0$, $S_{\alpha\beta}=1$ であり，10 次元で得られるボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad A_\mu, \quad B_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.7}$$

である．α, β などの添字は省略した．$\hat{D}$ 次元の反対称テンソル場と D 次元の場の関係は，Chern–Simons 項の形が簡単になるように，$B_{\mu\nu\rho}=\hat{B}_{\mu\nu\rho}$, $B_{\mu\nu\alpha}=\hat{B}_{\mu\nu}$ とする．A_μ を B_μ と書き，$a=\frac{1}{6}$ であることを使うと，これらの場に対するラグランジアンが，(5.8) のボソン場の部分になることが確かめられる．さらに，6.2.6 節の結果を使って Rarita–Schwinger 場の次元還元を行えば，(5.8) 全体が得られる．大局的対称性のうち $SL(1,\mathbb{R})=1$ は自明な群であり，$GL(1,\mathbb{R})^+$ は，5.3 節で述べた対称性になる．

この次元還元は，M 理論と IIA 型超弦理論の関係を，低エネルギー有効理論の範囲で示している[*1]．(6.8) から，コンパクト化した次元の大きさは $R=(\hat{g}_{10\,10})^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{2}{3}\phi}$ である．スカラー場の因子 e^ϕ は，弦理論の結合定数 g を表すので，$R\sim g^{\frac{2}{3}}$ という関係が得られる．したがって，弱結合 $g\ll 1$ で小さな R をもつ 10 次元的な IIA 型超弦理論が，強結合 $g\gg 1$ では大きな R をもつ 11 次元的な M 理論によって表されることがわかる．

7.1.2　$D=9$ 理論

$D=9$ への次元還元では，$\mathcal{N}=2$ 超重力理論[*2]が得られる．この場合は $d=2$ で，$B_{\alpha\beta\gamma}=0$ である．9 次元で得られるボソン場を，表 7.1 に示した．11 次元の反対称テンソル場と 9 次元の場の関係は，

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{\mu\nu\rho} &= B_{\mu\nu\rho}, \\
\hat{B}_{\mu\nu\alpha} &= B_{\mu\nu\alpha}+\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}{}^{\beta}\,B_{\nu]}, \\
\hat{B}_{\mu\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta}\,B_\mu \qquad (\epsilon_{\alpha\beta}=-\epsilon_{\beta\alpha},\ \epsilon_{12}=+1)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

とする．これを使うと，場の強さ (7.5) は

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\,\partial_{[\mu}\,B_{\nu\rho\sigma]}+12\,A_{[\mu}{}^{\alpha}\,\partial_\nu B_{\rho\sigma]\alpha}+12\,\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}{}^{\alpha}\partial_\nu A_\rho{}^{\beta}\,B_{\sigma]}, \\
F_{\mu\nu\rho\alpha} &= 3\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]\alpha}+\frac{3}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(B_{[\mu}\,F_{\nu\rho]}{}^{\beta}+A_{[\mu}{}^{\beta}\,F_{\nu\rho]}\right), \\
F_{\mu\nu\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu}=2\,\partial_{[\mu}B_{\nu]}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

*1)　E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85.

*2)　E. Bergshoeff, C. Hull and T. Ortín, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 547.

となる．これらの場の強さは，(7.3) と ξ^α ゲージ変換から導かれるゲージ変換

$$\begin{aligned}
&\delta_g B_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\zeta_{\nu\rho]} - \zeta^\alpha \left(F_{\mu\nu\rho\alpha} - 3\,\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}{}^\beta\,F_{\nu\rho]}\right), \\
&\delta_g B_{\mu\nu\alpha} = 2\,\partial_{[\mu}\zeta_{\nu]\alpha} - \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\zeta^\beta\,F_{\mu\nu} + \zeta\,F_{\mu\nu}{}^\beta\right), \\
&\delta_g B_\mu = \partial_\mu\zeta, \qquad \delta_g A_\mu{}^\alpha = \partial_\mu\zeta^\alpha
\end{aligned} \tag{7.10}$$

に対して不変である．ここで，変換のパラメータを，

$$\begin{aligned}
&\hat\zeta_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} - \zeta^\alpha\left(B_{\mu\nu\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}{}^\beta\,B_{\nu]}\right), \\
&\hat\zeta_{\mu\alpha} = \zeta_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\zeta^\beta\,B_\mu + \zeta\,A_\mu{}^\beta\right), \\
&\hat\zeta_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}\,\zeta, \qquad \xi^\alpha = \zeta^\alpha
\end{aligned} \tag{7.11}$$

とおいた．ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu S^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S_{\alpha\beta} \\
& -\frac{1}{4}\,e\,e^{\frac{3}{\sqrt7}\phi}\,S_{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}{}^\alpha\,F^{\mu\nu\beta} - \frac{1}{4}\,e\,e^{-\frac{4}{\sqrt7}\phi}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \\
& -\frac{1}{12}\,e\,e^{-\frac{1}{\sqrt7}\phi}\,S^{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu\rho\alpha}\,F^{\mu\nu\rho}{}_\beta - \frac{1}{48}\,e\,e^{\frac{2}{\sqrt7}\phi}\,F_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu\rho\sigma} \\
& -\frac{1}{144}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_9}\Big[2\,\partial_{\mu_1}B_{\mu_2\mu_3\mu_4}\,\partial_{\mu_5}B_{\mu_6\mu_7\mu_8}\,B_{\mu_9} \\
& -3\,\epsilon^{\alpha\beta}\,B_{\mu_1\mu_2\alpha}\,\partial_{\mu_3}B_{\mu_4\mu_5\beta}\,\partial_{\mu_6}B_{\mu_7\mu_8\mu_9} \\
& -6\,A_{\mu_1}{}^\alpha\,B_{\mu_2}\,\partial_{\mu_3}B_{\mu_4\mu_5\alpha}\,\partial_{\mu_6}B_{\mu_7\mu_8\mu_9} \\
& -3\,\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{\mu_1}{}^\alpha\,A_{\mu_2}{}^\beta\,B_{\mu_3}\,\partial_{\mu_4}B_{\mu_5}\,\partial_{\mu_6}B_{\mu_7\mu_8\mu_9}\Big]
\end{aligned} \tag{7.12}$$

となる．

このラグランジアンは，$GL(2,\mathbb{R}) \sim SL(2,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対する対称性をもっている．スカラー場 $S_{\alpha\beta}$ と ϕ は，$GL(2,\mathbb{R})/SO(2) \sim SL(2,\mathbb{R})/SO(2) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 非線形シグマ模型によって記述される．各ボソン場のこれらの変換に対する変換性を，表 7.1 に示した．

7.1.3 $D = 8$ 理論

$D = 8$ への次元還元では，$\mathcal{N} = 2$ 超重力理論[*3)]が得られる．8 次元のボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad S_{\alpha\beta}, \quad B, \quad A_\mu{}^\alpha, \quad B_{\mu\alpha\beta}, \quad B_{\mu\nu\alpha}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.13}$$

である．このうち，スカラー場 B は 11 次元の反対称テンソル場の成分 $\hat B_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}B$ を表す．$D = 10$, 9 の場合と同様にして，これらの場に対するラグラ

*3) A. Salam and E. Sezgin, *Nucl. Phys.* **B258** (1985) 284.

ンジアンを求めることができ，それは大局的 $SL(3,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性をもっている．実は，この理論はこの対称性を部分群として含むより大きな大局的対称性 $SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ をもっている．これを以下でみよう．

まず，スカラー場について考える．スカラー場の運動項は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, e\, \left(\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi + e^{-2\phi}\, \partial_\mu B\, \partial^\mu B\right) + \frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu S^{\alpha\beta}\, \partial^\mu S_{\alpha\beta} \qquad (7.14)$$

となる．第 1 項と第 3 項は，11 次元の重力場から現れたスカラー場の項であり，第 2 項は 11 次元の反対称テンソル場から現れたスカラー場の項である．第 3 項はこれまでと同様に $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ 非線形シグマ模型を表している．第 1 項と第 2 項は次のように書き換えることができる．まず，スカラー場 ϕ, B から 2×2 行列に値をもつ場

$$v' = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\phi} & e^{-\frac{1}{2}\phi} B \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\phi} \end{pmatrix}, \qquad \det v' = 1 \qquad (7.15)$$

をつくると，v' は商空間 $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の代表元を表している．4.1 節にしたがって，この行列から

$$v'^{-1}\, \partial_\mu\, v' = P'_\mu + Q'_\mu \qquad (P'^T_\mu = P'_\mu,\ Q'^T_\mu = -Q'_\mu) \qquad (7.16)$$

を定義すると，スカラー場 ϕ, B の運動項を，

$$-\operatorname{tr}\left(P'_\mu\, P'^\mu\right) = -\frac{1}{2}\, e\, \left(\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi + e^{-2\phi}\, \partial_\mu B\, \partial^\mu B\right) \qquad (7.17)$$

と表すことができる．したがって，これらの項は $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ 非線形シグマ模型を表していることがわかる．スカラー場全体は，$[SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})]/[SO(3) \times SO(2)]$ 非線形シグマ模型によって記述されており，大局的 $G = SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ 対称性と局所的 $H = SO(3) \times SO(2)$ をもつ．

他の場は，これらの群の表現によって変換する．H に対しては，スカラー場以外のボソン場は変換しない．重力場 ${e_\mu}^a$ は，G に対しても変換しない．ベクトル場については，$B_{\mu\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} {B_\mu}^\gamma$ とおくと，$({A_\mu}^\alpha, {B_\mu}^\alpha)$ は，G の $(\mathbf{3},\mathbf{2})$ 表現によって変換する．2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\alpha}$ は，G の $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ 表現によって変換する．3 階反対称テンソル $B_{\mu\nu\rho}$ は，$SL(3,\mathbb{R})$ に対しては変換せず，$SL(2,\mathbb{R})$ に対しては 4.2 節で議論した双対変換の形の変換をする．つまり，場の強さ $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ と (4.28) によって定義される $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ が，$SL(2,\mathbb{R})$ の $\mathbf{2}$ 表現によって変換する．このように場の変換性を与えると，場の方程式は大局的 $G = SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ 変換と局所的 $H = SO(3) \times SO(2)$ 変換に対して不変である．$SL(3,\mathbb{R})$ と H はラグランジアンの対称性であるが，$SL(2,\mathbb{R})$ は双対変換を含むため，場の方程式の対称性である．

7.1.4 $D = 7$ 理論

$D = 7$ への次元還元では，$\mathcal{N} = 4$ 超重力理論[*4] が得られる．7 次元のボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad S_{\alpha\beta}, \quad B^\alpha, \quad A_\mu{}^\alpha, \quad B_{\mu\alpha\beta}, \quad B_{\mu\nu\alpha}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.18}$$

である．スカラー場 B^α は 11 次元の反対称テンソル場の成分 $\hat{B}_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}B^\delta$ を表す．これらの場に対するラグランジアンは，$SL(4,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな大局的対称性 $SL(5,\mathbb{R})$ をもつ．

スカラー場の運動項は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu S^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,e\,e^{-\frac{5}{\sqrt{10}}\phi}\,S_{\alpha\beta}\,\partial_\mu B^\alpha\,\partial^\mu B^\beta \tag{7.19}$$

となる．スカラー場を 5×5 行列

$$V = \begin{pmatrix} e^{\frac{2}{\sqrt{10}}\phi} & e^{-\frac{1}{2\sqrt{10}}\phi}\,B^\beta\,v_\beta{}^i \\ 0 & e^{-\frac{1}{2\sqrt{10}}\phi}\,v_\alpha{}^i \end{pmatrix}, \qquad \det V = 1 \tag{7.20}$$

にまとめると，この行列は商空間 $SL(5,\mathbb{R})/SO(5)$ の代表元を表している．$D = 8$ の場合と同様に，$V^{-1}\partial_\mu V = P_\mu + Q_\mu$ ($P_\mu^T = P_\mu$, $Q_\mu^T = -Q_\mu$) とおくと，スカラー場の運動項は，$\mathcal{L} = -\,\mathrm{tr}(P_\mu P^\mu)$ と書ける．したがって，スカラー場は $SL(5,\mathbb{R})/SO(5)$ 非線形シグマ模型によって記述されている．

10 個のベクトル場 $B_{\mu\alpha\beta}$, $A_\mu{}^\alpha$ は，$SL(5,\mathbb{R})$ の **10** 表現によって変換する．3 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}$ は，1.6.1 節の方法によって双対な場 $\tilde{B}_{\mu\nu}$ に置き換えることができる．この $\tilde{B}_{\mu\nu}$ と初めからあった $B_{\mu\nu\alpha}$ を合わせた 5 個の 2 階反対称テンソル場は，$SL(5,\mathbb{R})$ の **5** 表現によって変換する．ラグランジアンは，大局的 $SL(5,\mathbb{R})$ 変換と局所的 $SO(5)$ 変換に対して不変である．

7.1.5 $D = 6$ 理論

$D = 6$ への次元還元では，$\mathcal{N} = (4,4)$ 超重力理論[*5]が得られる．6 次元のボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad S_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta}, \quad A_\mu{}^\alpha, \quad B_{\mu\alpha\beta}, \quad B_{\mu\nu\alpha}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.21}$$

である．スカラー場 $B^{\alpha\beta}$ は，11 次元の反対称テンソル場の成分 $\hat{B}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}B^{\delta\epsilon}$ を表す．これらの場に対する運動方程式は，$SL(5,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな大局的 $SO(5,5)$ 対称性をもつ．

スカラー場の運動項は，

---

*4) A. Salam and E. Sezgin, *Phys. Lett.* **B118** (1982) 359.

*5) Y. Tanii, *Phys. Lett.* **B145** (1984) 197.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, e\, \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi + \frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu S^{\alpha\beta}\, \partial^\mu S_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\, e\, e^{-\frac{4}{\sqrt{10}}\phi}\, S_{\alpha\gamma}\, S_{\beta\delta}\, \partial_\mu B^{\alpha\beta}\, \partial^\mu B^{\gamma\delta} \tag{7.22}$$

となる．スカラー場を 10×10 行列

$$V = \begin{pmatrix} V^\alpha{}_i & V^{\alpha i} \\ V_{\alpha i} & V_\alpha{}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\sqrt{10}}\phi}\, v_i{}^\alpha & e^{-\frac{1}{\sqrt{10}}\phi}\, A^{\alpha\beta}\, v_\beta{}^i \\ 0 & e^{-\frac{1}{\sqrt{10}}\phi}\, v_\alpha{}^i \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

にまとめると，この行列は商空間 $SO(5,5)/[SO(5) \times SO(5)]$ の代表元を表している．実際，この V は，(4.39) の Ω $(\epsilon = +1)$ に対して，$V^T \Omega V = \Omega$ を満たしている．$V^{-1}\partial_\mu V = P_\mu + Q_\mu$ $(P_\mu^T = P_\mu,\ Q_\mu^T = -Q_\mu)$ とおくと，スカラー場の運動項は，$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(P_\mu P^\mu)$ と書ける．したがって，スカラー場は，$SO(5,5)/[SO(5) \times SO(5)]$ 非線形シグマ模型で記述されている．

反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}$ は，1.6.1 節の方法によって双対なベクトル場 $\tilde{B}_\mu$ に置き換えることができ，$A_\mu{}^\alpha$, $B_{\mu\alpha\beta}$ と合わせた 16 個のベクトル場は，$SO(5,5)$ の **16** 表現（Weyl スピノール表現）によって変換する．$SO(5,5)$ は，5 個の 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\alpha}$ に対しては，双対変換として作用する．場の強さ $F_{\mu\nu\rho\alpha}$ と (4.28) によって定義される $G_{\mu\nu\rho}{}^\alpha$ は，$SO(5,5)$ の **10** 表現によって変換する．場の方程式は，大局的 $SO(5,5)$ 変換と局所的 $SO(5) \times SO(5)$ 変換に対して不変である．

7.1.6 $D = 5$ 理論

$D = 5$ への次元還元では，$\mathcal{N} = 8$ 超重力理論*6) が得られる．5 次元のボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad S_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta\gamma}, \quad A_\mu{}^\alpha, \quad B_{\mu\alpha\beta}, \quad B_{\mu\nu\alpha}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.24}$$

である．1.6.1 節の方法によって，$B_{\mu\nu\rho}$ は双対なスカラー場 $\tilde{B}$ に，$B_{\mu\nu\alpha}$ は双対なベクトル場 $\tilde{B}_\mu{}^\alpha$ に置き換えることができる．これらの場に対するラグランジアンは，$SL(6,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな大局的 $E_{6(+6)}$ 対称性をもつ．

スカラー場の運動項は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, e\, \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\, e\, e^{-2\phi} \left(\partial_\mu \tilde{B} - \frac{1}{12}\, B_{\alpha\beta\gamma}\, \partial_\mu \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} \right)^2 + \frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu S^{\alpha\beta}\, \partial^\mu S_{\alpha\beta} - \frac{1}{12}\, e\, e^{-\phi}\, S^{\alpha\delta}\, S^{\beta\varepsilon}\, S^{\gamma\eta}\, \partial_\mu B_{\alpha\beta\gamma}\, \partial^\mu B_{\delta\varepsilon\eta} \tag{7.25}$$

となる．ここで，$\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta} B_{\delta\varepsilon\eta}$ とおいた．$\partial_\mu B_{\alpha\beta\gamma} \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma}$ の項は，

*6) E. Cremmer, J. Scherk and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B84** (1979) 83; E. Cremmer, in "Superspace and Supergravity", eds. S.W. Hawking and M. Roček (Cambridge Univ. Press, 1981).

$B_{\mu\nu\rho}$ を双対な場 $\tilde{B}$ に置き換える際に，ラグランジアンの Chern–Simons 項が $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\partial_\mu B_{\nu\rho\sigma}\partial_\tau B_{\alpha\beta\gamma}\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma}$ の形の項を含むため現れる．スカラー場は，27×27 行列

$$V = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\phi}\, v_\alpha{}^i & B_{\alpha ij} & -e^{-\frac{1}{2}\phi}\left(\tilde{B}\, v_\alpha{}^i + \frac{1}{4}B_{\alpha\gamma\delta}\,\tilde{B}^{\gamma\delta i}\right) \\ 0 & 2v_{[i}{}^\alpha\, v_{j]}{}^\beta & -e^{-\frac{1}{2}\phi}\,\tilde{B}^{\alpha\beta i} \\ 0 & 0 & e^{-\frac{1}{2}\phi}\, v_\alpha{}^i \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

にまとめることができる．この行列の行の添字は上から α, $[\alpha\beta]$, α, 列の添字は左から i, $[ij]$, i である．（反対称な添字の組については，第 4 章の脚注 *7) を参照せよ．）また，$B_{\alpha ij} = v_i{}^\gamma v_j{}^\delta B_{\alpha\gamma\delta}$, $\tilde{B}^{\alpha\beta i} = \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma}v_\gamma{}^i$ とおいた．この行列は，商空間 $E_{6(+6)}/USp(8)$ の代表元を表している．$E_{6(+6)}$ は次元が 78 の非コンパクトな Lie 群であり，$USp(8)$ はその極大コンパクト部分群である．（$E_{6(+6)}$ については，脚注 *6) の論文と参考文献 [22] を参照せよ．）この行列から，$V^{-1}\partial_\mu V = P_\mu + Q_\mu$ $(P_\mu^T = P_\mu,\ Q_\mu^T = -Q_\mu)$ を定義すると，スカラー場の運動項は，$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,(P_\mu P^\mu)$ と書ける．したがって，スカラー場は，$E_{6(+6)}/USp(8)$ 非線形シグマ模型で記述されている．27 個のベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$, $B_{\mu\alpha\beta}$, $\tilde{B}_\mu{}^\alpha$ は，$E_{6(+6)}$ の **27** 表現（基本表現）によって変換する．ラグランジアンは，大局的 $E_{6(+6)}$ 変換と局所的 $USp(8)$ 変換に対して不変である．

7.1.7 $D = 4$ 理論

$D = 4$ への次元還元では，4.3 節で述べた $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論が得られる．4 次元のボソン場は，

$$e_\mu{}^a, \quad \phi, \quad S_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta\gamma}, \quad A_\mu{}^\alpha, \quad B_{\mu\alpha\beta}, \quad B_{\mu\nu\alpha}, \quad B_{\mu\nu\rho} \tag{7.27}$$

である．1.6.1 節の方法によって，$B_{\mu\nu\alpha}$ は双対なスカラー場 $\tilde{B}^\alpha$ に置き換えることができる．3 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}$ は，場の方程式の解が $F_{\mu\nu\rho\sigma} = e\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\times$（定数）となるため，力学的自由度をもたないことがわかる．これらの場に対する場の方程式は，$SL(7,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな大局的 $E_{7(+7)}$ 対称性をもつ．

スカラー場の運動項は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\,e\,\partial_\mu S^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S_{\alpha\beta} \\ &-\frac{1}{12}\,e\,e^{-\frac{2}{\sqrt{7}}\phi}\,S^{\alpha\delta}\,S^{\beta\varepsilon}\,S^{\gamma\eta}\,\partial_\mu B_{\alpha\beta\gamma}\,\partial^\mu B_{\delta\varepsilon\eta} \\ &-\frac{1}{2}\,e\,e^{-\frac{4}{\sqrt{7}}\phi}\,S_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu\tilde{B}^\alpha - \frac{1}{12}\,B_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\,\partial_\mu\tilde{B}^{\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\right) \\ &\times\left(\partial^\mu\tilde{B}^\beta - \frac{1}{12}\,B_{\delta_1\delta_2\delta_3}\,\partial^\mu\tilde{B}^{\beta\delta_1\delta_2\delta_3}\right)\end{aligned} \tag{7.28}$$

となる．ここで，$\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\kappa}B_{\varepsilon\eta\kappa}$ とおいた．スカラー場を 56×56 行列

$$V = \left(\begin{array}{cc|cc} e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}\phi}\, v_\alpha{}^i & 2\,e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}\phi}\left(v_\alpha{}^{[i}\,\tilde{B}^{j]} - \frac{1}{8} B_{\alpha\gamma\delta}\,\tilde{B}^{\gamma\delta ij}\right) & e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}\phi} B_{\alpha ij} & e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}\phi}\left(B_{\alpha\gamma i}\,\tilde{B}^{\gamma} - \frac{1}{24} B_{\alpha\gamma\delta}\,\tilde{B}^{\gamma\delta\varepsilon\eta}\,B_{\varepsilon\eta i}\right) \\ 0 & 2\,e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}\phi}\, v_\alpha{}^{[i}\, v_\beta{}^{j]} & 0 & e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}\phi}\, B_{\alpha\beta i} \\ \hline 0 & -e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}\phi}\, \tilde{B}^{\alpha\beta ij} & 2\,e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}\phi}\, v_{[i}{}^{\alpha} v_{j]}{}^{\beta} & -2\,e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}\phi}\left(v_i{}^{[\alpha}\,\tilde{B}^{\beta]} + \frac{1}{8}\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,B_{\gamma\delta i}\right) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}\phi}\, v_i{}^{\alpha} \end{array}\right) \tag{7.29}$$

にまとめることができる．この行列の行を表す添字は，上から順に，下付き α，下付き $[\alpha\beta]$，上付き $[\alpha\beta]$，上付き α である．また，列を表す添字は，左から順に，上付き i，上付き $[ij]$，下付き $[ij]$，下付き i である．(反対称な添字の組については，第 4 章の脚注 *7) を参照せよ.) さらに，$D=5$ の場合と同様に，$B_{\alpha\beta i} = v_i{}^\gamma B_{\alpha\beta\gamma}$ などとおいた．この行列は商空間 $E_{7(+7)}/SU(8)$ の代表元を表している．(ただし，4.3 節とはちがい，実数行列になるような基底を使っている.) この行列から，$V^{-1}\partial_\mu V = P_\mu + Q_\mu$ ($P_\mu^T = P_\mu$, $Q_\mu^T = -Q_\mu$) を定義すると，スカラー場の運動項は，$\mathcal{L} = -\frac{1}{12}\,\mathrm{tr}\,(P_\mu P^\mu)$ と書ける．したがって，スカラー場は，$E_{7(+7)}/SU(8)$ 非線形シグマ模型で記述されている．$E_{7(+7)}$ は，28 個のベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$, $B_{\mu\alpha\beta}$ に対しては，双対変換として作用する．これらのベクトル場の場の強さ $F_{\mu\nu}$ と (4.28) によって定義される $G_{\mu\nu}$ は，$E_{7(+7)}$ の **56** 表現によって変換する．場の方程式は，大局的 $E_{7(+7)}$ 変換と局所的 $SU(8)$ 変換に対して不変である．

7.2　$D=10$, $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論の次元還元

5.4 節で議論した 10 次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論は，11 次元の超重力理論から次元還元によって得ることはできないので，その低次元への次元還元は前節の議論とは別に考える必要がある．ここでは，その $D=9$ への次元還元*7) を考えよう．下で見るように，$D=9$ での理論は，11 次元からの次元還元と同じく，$\mathcal{N}=2$ 超重力理論になる．したがって，$D<9$ への次元還元も 11 次元からの場合と同じ理論になる．

$\hat{D}=10$, $\mathcal{N}=(2,0)$ 理論のボソン場は，重力場 $\hat{e}_M{}^A$，2 個のスカラー場 $\hat{\varphi}$, $\hat{C}$，2 個の 2 階反対称テンソル場 $\hat{B}_{MN(\alpha)}$ $(\alpha=1,2)$*8)，1 個の 4 階反対称テンソル場 $\hat{B}_{MNPQ}$ である．ラグランジアンは，

*7)　脚注 *2) の論文．

*8)　この節では，添字 $\alpha, \beta, \cdots$ は，コンパクト化した次元の方向ではなく，2 個の 2 階反対称テンソル場を区別する添字として使う．これは，(5.51), (5.52) の $i, j, \cdots$ に対応する．

$$\mathcal{L} = \hat{e}\,\hat{R} - \frac{1}{2}\,\hat{e}\,\hat{g}^{MN}\left(\partial_M\hat{\varphi}\,\partial_N\hat{\varphi} + e^{2\hat{\varphi}}\,\partial_M\hat{C}\,\partial_N\hat{C}\right)$$
$$-\frac{1}{12}\hat{e}\,e^{-\hat{\varphi}}\,\hat{F}_{MNP(2)}\hat{F}^{MNP}{}_{(2)}$$
$$-\frac{1}{12}\hat{e}\,e^{\hat{\varphi}}(\hat{F}_{(1)} - \hat{C}\hat{F}_{(2)})_{MNP}\,(\hat{F}_{(1)} - \hat{C}\hat{F}_{(2)})^{MNP}$$
$$-\frac{1}{4\times 5!}\hat{e}\,\hat{F}_{MNPQR}\,\hat{F}^{MNPQR}$$
$$+\frac{1}{144\times 4!}\,\epsilon^{M_1\cdots M_{10}}\,\hat{B}_{M_1\cdots M_4}\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\hat{F}_{M_5M_6M_7(\alpha)}\hat{F}_{M_8M_9M_{10}(\beta)} \tag{7.30}$$

である．ここで，場の強さは，

$$\begin{aligned}
&\hat{F}_{MNPQR} = 5\,\partial_{[M}\hat{B}_{NPQR]} - 5\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{[MN(\alpha)}\,\hat{F}_{PQR](\beta)},\\
&\hat{F}_{MNP(\alpha)} = 3\,\partial_{[M}\hat{B}_{NP](\alpha)}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

で与えられる．さらに，4 階反対称テンソル場は自己双対性条件

$$\hat{F}^{M_1\cdots M_5} = \frac{1}{5!}\,e^{-1}\,\epsilon^{M_1\cdots M_{10}}\,\hat{F}_{M_6\cdots M_{10}} \tag{7.32}$$

を満たす．

9 次元で現れるボソン場は，

$$e_\mu{}^a,\quad \phi,\quad \varphi,\quad C,\quad A_\mu,\quad B_\mu{}^{(\alpha)},\quad B_{\mu\nu(\alpha)},\quad B_{\mu\nu\rho},\quad B_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{7.33}$$

である．10 次元の場と D 次元の場の関係は，重力場については (6.6) を使い，反対称テンソル場とスカラー場については，

$$\begin{aligned}
&\hat{B}_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\mu\nu\rho\sigma} + 3\,A_{[\mu}\,B_\nu{}^{(\alpha)}\,B_{\rho\sigma](\alpha)},\\
&\hat{B}_{\mu\nu\rho 9} = B_{\mu\nu\rho} - \frac{3}{2}\,B_{[\mu}{}^{(\alpha)}\,B_{\nu\rho](\alpha)} + \frac{3}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}\,B_\nu{}^{(\alpha)}\,B_{\rho]}{}^{(\beta)},\\
&\hat{B}_{\mu\nu(\alpha)} = B_{\mu\nu(\alpha)} - \epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}\,B_{\nu]}{}^{(\beta)},\\
&\hat{B}_{\mu 9(\alpha)} = \epsilon_{\alpha\beta}\,B_\mu{}^{(\beta)},\qquad \hat{\varphi} = \varphi,\qquad \hat{C} = C
\end{aligned} \tag{7.34}$$

とする．11 次元の局所 Lorentz 添字の成分 $\hat{F}_{ABC}$ から (6.38) のように定義された反対称テンソル場の場の強さは，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu\rho\sigma\tau} &= 5\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho\sigma\tau]} - 15\,\epsilon^{\alpha\beta}\,B_{[\mu\nu(\alpha)}\,\partial_\rho B_{\sigma\tau](\beta)}\\
&\quad -20\,A_{[\mu}\,\partial_\nu B_{\rho\sigma\tau]} - 30\,A_{[\mu}\,B_\nu{}^{(\alpha)}\,\partial_\rho B_{\sigma\tau](\alpha)}\\
&\quad -15\,\epsilon_{\alpha\beta}\,B_{[\mu}{}^{(\alpha)}\,B_\nu{}^{(\beta)}\,A_\rho\,\partial_\sigma A_{\tau]},\\
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho\sigma]} + 12\,B_{[\mu}{}^{(\alpha)}\partial_\nu B_{\rho\sigma](\alpha)}\\
&\quad +6\,\epsilon_{\alpha\beta}\,A_{[\mu}B_\nu{}^{(\alpha)}\,F_{\rho\sigma]}{}^{(\beta)},\\
F_{\mu\nu\rho(\alpha)} &= 3\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho](\alpha)}\\
&\qquad -3\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(B_{[\mu}{}^{(\beta)}\,\partial_\nu A_{\rho]} + A_{[\mu}\,\partial_\nu B_{\rho]}{}^{(\beta)}\right),\\
F_{\mu\nu(\alpha)} &= 2\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\partial_{[\mu}B_{\nu]}{}^{(\beta)} \equiv \epsilon_{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}{}^{(\beta)}
\end{aligned} \tag{7.35}$$

となる．これらを使うと，9 次元のラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\,\partial_\mu S'^{\alpha\beta}\,\partial^\mu S'_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\,e\,e^{\frac{4}{\sqrt{7}}\phi}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \\ -\frac{1}{4}\,e\,e^{-\frac{3}{\sqrt{7}}\phi}\,S'_{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}{}^{(\alpha)}\,F^{\mu\nu(\beta)} - \frac{1}{12}\,e\,e^{\frac{1}{\sqrt{7}}\phi}\,S'^{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu\rho(\alpha)}\,F^{\mu\nu\rho}{}_{(\beta)} \\ -\frac{1}{96}\,e\,e^{-\frac{2}{\sqrt{7}}\phi}\,F_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{480}\,e\,e^{\frac{2}{\sqrt{7}}\phi}\,F_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,F^{\mu\nu\rho\sigma\tau} + \mathcal{L}_{\mathrm{CS}}\end{aligned} \tag{7.36}$$

が得られる．ここで，$\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}$ は (7.30) の最後の項（Chern–Simons 項）である．また，スカラー場 φ と C からつくった 2×2 対称行列

$$S'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} + e^{\varphi}C^2 & e^{\varphi}C \\ e^{\varphi}C & e^{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad \det S' = 1 \tag{7.37}$$

とその逆行列 $S'^{\alpha\beta}$ を導入した．自己双対性条件 (7.32) は，

$$e^{-\frac{2}{\sqrt{7}}\phi}\,e\,F^{\mu_1\cdots\mu_4} = -\frac{1}{5!}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_9}\,F_{\mu_5\cdots\mu_9} \tag{7.38}$$

となる．

この自己双対性条件は，ゲージ自由度を除いて $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ と $B_{\mu\nu\rho}$ の間に関係があることを示しているので，この 2 つの場のうち $B_{\mu\nu\rho}$ だけを独立な場と考えることができる．(7.38) の両辺を微分して，右辺に (7.35) を使うと，

$$\begin{aligned}&\partial_{\mu_1}(e^{-\frac{2}{\sqrt{7}}\phi}\,e\,F^{\mu_1\cdots\mu_4}) \\ &= \frac{1}{24}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_9}\,\partial_{\mu_1}\Big[4\,A_{\mu_5}\,\partial_{\mu_6}B_{\mu_7\mu_8\mu_9} + 3\,\epsilon^{\alpha\beta}\,B_{\mu_5\mu_6(\alpha)}\,\partial_{\mu_7}B_{\mu_8\mu_9(\beta)} \\ &\quad +6\,A_{\mu_5}\,B_{\mu_6}{}^{(\alpha)}\,\partial_{\mu_7}B_{\mu_8\mu_9(\alpha)} + 3\,\epsilon_{\alpha\beta}\,B_{\mu_5}{}^{(\alpha)}\,B_{\mu_6}{}^{(\beta)}\,A_{\mu_7}\,\partial_{\mu_8}A_{\mu_9}\Big]\end{aligned} \tag{7.39}$$

が得られる．これは $B_{\mu\nu\rho}$ に対する Maxwell 型の場の方程式であり，また，$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含んでいない．(7.38) の右辺にあった $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ 依存性は，微分して添字について反対称化したために消えた．他の場に対する場の方程式は，ラグランジアン (7.36) から導くことができ，条件 (7.38) を使えば，$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含まない方程式が得られる．このようにして得られた $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含まない場の方程式のすべては，ある新しいラグランジアンから導くことができる．そのようなラグランジアンを探すと，それは，11 次元の超重力理論の次元還元によって得られた 9 次元のラグランジアン (7.12) と同じ形になることがわかる．今考えている 9 次元の理論のラグランジアンは，(7.12) で表 7.2 のような場の置き換えをしたものになっている．

この $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含まない新しいラグランジアンは，次のような別の方法*9) で求めることもできる．まず，1.6.1 節の方法によって，ラグランジアンの中の $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ を双対な場 $\tilde{B}_{\mu\nu\rho}$ に置き換える．この双対な場を使ったラグランジアン

*9)　これは，参考文献 [12] の 17.3 節に述べられている方法である．

表 7.2　次元還元によって得られる 9 次元の場.

[redacted]	
$e_\mu{}^a$	$e_\mu{}^a$
ϕ	$-\phi$
$S_{\alpha\beta}$	$S'_{\alpha\beta}$
$A_\mu{}^\alpha$	$B_\mu{}^{(\alpha)}$
B_μ	$-A_\mu$
$B_{\mu\nu\alpha}$	$B_{\mu\nu(\alpha)}$
$B_{\mu\nu\rho}$	$B_{\mu\nu\rho}$

は，$B_{\mu\nu\rho}$ と（$B_{\mu\nu\rho\sigma}$ の自由度を表す）$\tilde{B}_{\mu\nu\rho}$ の両方を含んでいる．自己双対性条件 (7.38) をこの双対な場を使って表すと，$B_{\mu\nu\rho}$ と $\tilde{B}_{\mu\nu\rho}$ の関係

$$\tilde{B}_{\mu\nu\rho} = B_{\mu\nu\rho} - \frac{3}{2} B_{[\mu}{}^{(\alpha)} B_{\nu\rho](\alpha)} + \frac{3}{2} \epsilon_{\alpha\beta} B_{[\mu}{}^{(\alpha)} B_\nu{}^{(\beta)} A_{\rho]} + 3\,\partial_{[\mu} \zeta_{\nu\rho]} \tag{7.40}$$

が得られる．右辺の最後の項は任意のゲージ変換を表す．これを双対な場を使ったラグランジアンに代入すると，ゲージ変換の形の不定性は消え，$B_{\mu\nu\rho}$ だけを含んだラグランジアンが得られ，(7.39) などの場の方程式から求めたラグランジアンと一致する．

このように，$\hat{D} = 10$, $\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論と $\hat{D} = 11$, $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論は，次元還元によって同じ 9 次元の理論を与える．しかし，9 次元の場の高次元の起源は 2 つの理論で異なる．たとえば，$A_\mu{}^\alpha$ は 11 次元の重力場から来ているが，対応する $B_\mu{}^{(\alpha)}$ は 10 次元の 2 階の反対称テンソル場から来ている．また，スカラー場 $S_{\alpha\beta}$ は 11 次元の重力場から来ているが，対応する $S'_{\alpha\beta}$ は初めから 10 次元の理論にあったスカラー場 $\hat{\varphi}$, $\hat{C}$ から来ている．9 次元の理論の対称性 $SL(2,\mathbb{R})$ の起源も異なっている．11 次元から得られた場合は，コンパクト化した 2 次元方向の座標変換不変性の結果であるが，10 次元から得られた場合は，初めから 10 次元の理論のもっていた対称性である．

$\hat{D} = 11$, $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論をいったん 10 次元に次元還元すると $D = 10$, $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論が得られ，それをさらに次元還元すると 9 次元の理論が得られる．したがって，10 次元の $\mathcal{N} = (1,1)$ 理論と $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論の次元還元が，同じ 9 次元の理論を与えることがわかる．$\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論と $\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論は，それぞれ，IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論の低エネルギー有効理論であり，この 2 つの超弦理論は **T 双対性**によって関係した等価な理論であることが知られている*10)．この結果は，この超弦理論の T 双対性の現れである．

*10)　M. Dine, P. Huet and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 301; J. Dai, R.G. Leigh and J. Polchinski, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2073.

7.3 $D = 10, \mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論の次元還元

5.5 節で述べた $\hat{D} = 10, \mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論の次元還元*11) を考えよう．この場合，物質場として超 Yang–Mills 多重項を結合させた理論を考えることができる．簡単のため，ボソン場についてだけ議論する．含まれているボソン場は，重力場 $\hat{e}_M{}^A$，スカラー場 $\hat{\phi}$，2 階反対称テンソル場 $\hat{B}_{MN}$，および，Yang–Mills 場 $\hat{A}^I_M$ である．6.2.3 節で見たように，Yang–Mills 場を次元還元すると，低次元の Yang–Mills 場とスカラー場が現れ，スカラー場の一般的な真空期待値に対しては，ゲージ群の Cartan 部分代数部分の場だけがゼロ質量になる．ここでは，このような Cartan 部分代数に対応した場 $\hat{A}^I_M$ $(I = 1, 2, \cdots, n(= \mathrm{rank}\, G))$ についてだけ考える．特別な真空期待値に対しては，より多くのゼロ質量ゲージ場が現れるが，ここではそのような例外的な場合は考えないことにする．

10 次元のボソン場のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \hat{e}\,\hat{R} - \frac{1}{2}\,\hat{e}\,\hat{g}^{MN}\,\partial_M\hat{\phi}\,\partial_N\hat{\phi} - \frac{1}{12}\,\hat{e}\,e^{-\hat{\phi}}\,\hat{F}_{MNP}\,\hat{F}^{MNP} - \frac{1}{4}\,\hat{e}\,e^{-\frac{1}{2}\hat{\phi}}\,\hat{F}^I_{MN}\,\hat{F}^{IMN} \tag{7.41}$$

であり，反対称テンソル場と Yang–Mills 場の場の強さは，

$$\begin{aligned} \hat{F}_{MNP} &= 3\,\partial_{[M}\hat{B}_{NP]} - 3\,\hat{A}^I_{[M}\,\partial_N\hat{A}^I_{P]}, \\ \hat{F}^I_{MN} &= 2\,\partial_{[M}\hat{A}^I_{N]} \end{aligned} \tag{7.42}$$

で与えられる．Yang–Mills 場は，Cartan 部分代数の部分だけ考えているので，n 個の $U(1)$ ゲージ場で表されている．

6.2 節の結果を使って，この理論の $D = 10 - d$ 次元への次元還元を考える．10 次元の場と D 次元の場の関係は，多脚場については (6.6) を使い，その他の場については，

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - A_{[\mu}{}^{\alpha}\,B_{\nu]\alpha} + A_\mu{}^\alpha\,A_\nu{}^\beta\,B_{\alpha\beta} + A_{[\mu}{}^\alpha\,A_{\nu]}{}^I\,a_\alpha{}^I, \\ \hat{B}_{\mu\alpha} &= B_{\mu\alpha} - B_{\alpha\beta}\,A_\mu{}^\beta - \frac{1}{2}\,a_\alpha{}^I\,A_\mu{}^I, \\ \hat{B}_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta}, \qquad \hat{\phi} = \sqrt{\frac{8}{D-2}}\,\phi + \frac{4}{D-2}\ln E, \\ \hat{A}^I_\mu &= A_\mu{}^I + A_\mu{}^\alpha\,a_\alpha{}^I, \qquad \hat{A}^I_\alpha = a_\alpha{}^I \end{aligned} \tag{7.43}$$

とする．(6.38) のように定義された場の強さは，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\rho} &= 3\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} - 3\,A_{[\mu}{}^\alpha\,\partial_\nu B_{\rho]\alpha} - 3\,\partial_{[\mu}A_\nu{}^\alpha\,B_{\rho]\alpha} \\ &\qquad - 3\,A_{[\mu}{}^I\,\partial_\nu A_{\rho]}{}^I, \\ F_{\mu\nu\alpha} &= 2\,\partial_{[\mu}B_{\nu]\alpha} - 2\,C_{\alpha\beta}\,\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^\beta - 2\,a_\alpha{}^I\,\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^I, \\ F_{\mu\nu}{}^I &= 2\,\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^I + 2\,a_\alpha{}^I\,\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^\alpha \end{aligned} \tag{7.44}$$

---

*11) J. Maharana and J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 3.

となる．ここで，

$$C_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\, a_\alpha{}^I\, a_\beta{}^I \tag{7.45}$$

とおいた．また，(6.9) のように $G_{\alpha\beta} = E_\alpha{}^i E_{\beta i}$ とする代わりに，

$$G_{\alpha\beta} = e^{\frac{1}{2}\hat{\phi}}\, E_\alpha{}^i\, E_{\beta i} \tag{7.46}$$

とおく．これらを使って，D 次元のラグランジアンを求めると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {}& e\,R - \frac{1}{2}\, e\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu G^{\alpha\beta}\, \partial^\mu G_{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{4}\, e\, \partial_\mu B_{\alpha\beta}\, \partial^\mu B_{\gamma\delta}\, G^{\alpha\gamma}\, G^{\beta\delta} - \frac{1}{2}\, e\, \partial_\mu a_\alpha{}^I\, \partial^\mu a_\beta{}^I\, G^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{4}\, e\, e^{-\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi}\, F_{\mu\nu}{}^\alpha\, F^{\mu\nu\beta}\, G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\, e\, e^{-\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi}\, F_{\mu\nu\alpha}\, F^{\mu\nu}{}_\beta\, G^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{4}\, e\, e^{-\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi}\, F_{\mu\nu}{}^I\, F^{\mu\nu I} - \frac{1}{12}\, e\, e^{-\sqrt{\frac{8}{D-2}}\phi}\, F_{\mu\nu\rho}\, F^{\mu\nu\rho}\end{aligned} \tag{7.47}$$

が得られる．含まれている場は，重力場 $e_\mu{}^a$, $d^2 + dn + 1$ 個のスカラー場 ϕ, $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $a_\alpha{}^I$, $2d + n$ 個のベクトル場 $A_\mu{}^\alpha$, $B_{\mu\alpha}$, $A_\mu{}^I$, および，反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ である．

フェルミオン場も含めて考えた場合，D 次元の理論は，最大の半分（16 個の成分）の超対称性をもち，超重力多重項と $d + n$ 個のゲージ多重項が結合した理論になる．これは，第 3 章の表 3.3，表 3.4 と比べることにより確認できる．ただし，$D = 5$ と $D = 4$ の場合には，反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ を双対な場（ベクトル場 $\tilde{B}_\mu$ またはスカラー場 $\tilde{B}$）に置き換える必要がある．これについては，この節の最後で述べる．

大局的対称性

このラグランジアンは，大局的 $SO(d, d+n) \times GL(1, \mathbb{R})^+$ 対称性をもっている．この対称性を見やすくするために，$2d + n$ 個のベクトル場をまとめて

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu{}^\alpha \\ B_{\mu\alpha} \\ A_\mu{}^I \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\, \partial_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} \tag{7.48}$$

と表す．また，スカラー場を使って，$(2d + n) \times (2d + n)$ 行列

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}C & -G^{-1}a \\ -C^T G^{-1} & G + C^T G^{-1} C + a\, a^T & a + C^T G^{-1} a \\ -a^T G^{-1} & a^T + a^T G^{-1} C & 1 + a^T G^{-1} a \end{pmatrix} \tag{7.49}$$

を定義する．ここで，G, G^{-1}, a, C は，それぞれ，$G_{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$, $a_\alpha{}^I$, $C_{\alpha\beta}$ を成分とする行列を表す．行列 $\mathcal{M}$ は，

$$\mathcal{M}^T = \mathcal{M}, \qquad \mathcal{M}^T \eta \mathcal{M} = \eta, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

を満たす．行列 η を対角化すると，固有値として d 個の -1 と $d+n$ 個の $+1$ を持つことがわかる．したがって，(7.50) の 2 番目の式は，$\mathcal{M}$ が $SO(d, d+n)$ の元であることを意味する．(7.50) の最初の式から，$\mathcal{M}$ は対称行列でもあるので，その独立な成分の数は $d^2 + dn$ である．これは $\mathcal{M}$ に含まれているスカラー場の個数に等しく，行列 (7.49) は (7.50) の 2 つの条件を満たす最も一般的な形である．

これらを使い，(7.50) から $\mathcal{M}^{-1} = \eta \mathcal{M} \eta$ であることに注意すると，ラグランジアンを

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu \phi\,\partial^\mu \phi + \frac{1}{8}\,e\,\mathrm{tr}\left(\partial_\mu \mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu \mathcal{M}\right) \\ & -\frac{1}{4}\,e\,e^{-\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12}\,e\,e^{-\sqrt{\frac{8}{D-2}}\phi}\,F_{\mu\nu\rho}\,F^{\mu\nu\rho}\end{aligned} \tag{7.51}$$

と書き直すことができる．また，反対称テンソル場の場の強さは，

$$F_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu} A_{\nu\rho]} - 3\,\mathcal{A}^T_{[\mu}\,\eta\,\partial_\nu\,\mathcal{A}_{\rho]} \tag{7.52}$$

と書ける．これらの式は，明らかに大局的 $SO(d, d+n)$ 変換

$$\mathcal{A}_\mu \;\to\; g\,\mathcal{A}_\mu, \qquad \mathcal{M} \;\to\; g\,\mathcal{M}\,g^T \qquad (g^T \eta g = \eta) \tag{7.53}$$

に対して不変である．また，大局的 $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換

$$\phi \;\to\; \phi + \sqrt{2(D-2)}\,\alpha, \quad \mathcal{A}_\mu \;\to\; e^\alpha\,\mathcal{A}_\mu, \quad B_{\mu\nu} \;\to\; e^{2\alpha}\,B_{\mu\nu} \tag{7.54}$$

に対しても不変である．

無限小変換の場合に $g = 1 + t$ とおくと，t は $SO(d, d+n)$ の Lie 代数の元で，$g^T \eta g = \eta$ から

$$t = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & -a^T & f \\ -f^T & -c^T & d \end{pmatrix} \quad (b^T = -b,\ d^T = -d,\ e^T = -e) \tag{7.55}$$

と書ける．パラメータ a のうち $\mathrm{tr}\, a = 0$ を満たすものは，6.2.1 節で議論した $\hat{\xi}^\alpha = a^\alpha{}_\beta y^\beta$ の形の座標変換から得られる $SL(d,\mathbb{R})$ 変換を表す．パラメータ a のトレース部分 $a^\alpha{}_\beta = \frac{1}{d}\,\mathrm{tr}\, a\,\delta^\alpha_\beta$ は，(7.54) とは別のもう 1 つの $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換を表す（次のパラグラフを参照）．パラメータ e，f による変換は，6.2.4 節で議論した $\hat{\zeta}_\alpha = -\frac{1}{2} e_{\alpha\beta} y^\beta$, $\hat{\zeta}^I = f^I_\alpha y^\alpha$ の形のゲージ変換から得られる変換を表す．パラメータ d による変換は，n 個のゲージ場 $\hat{A}^I_M$ の $SO(n)$ 回転を表す．残りのパラメータ b，c の変換は，異なる 10 次元の場 $\hat{g}_{MN}$, $\hat{A}_{MN}$, $\hat{A}^I_M$ を結び

つける変換であり，それに対する対称性の存在は自明ではない．

ラグランジアン (7.51) は，上で見たように，2 つの $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対して不変である．この 10 次元的な起源を考えよう．5.5 節で述べたように，10 次元のラグランジアンは表 5.3 のウェイトをもつ $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換に対して不変である．また，次元還元によってもう一つの $GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性が現れることが次のようにわかる．まず，10 次元のラグランジアンは，c'' を定数パラメータとする変換 $\delta\hat{e}_M{}^A = c''\hat{e}_M{}^A$, $\delta\hat{A}_{MN} = 2c''\hat{A}_{MN}$, $\delta\hat{A}^I_M = c''\hat{A}^I_M$ に対して，$\delta\mathcal{L} = 8c''\mathcal{L}$ と変換する．この変換と座標変換 $\hat{\xi}^\alpha = -8dc''y^\alpha$ の合成変換に対して，ラグランジアンが不変であることがわかる．(6.2.1 節の $GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性の議論を参照せよ.）この 2 つの $GL(1,\mathbb{R})^+$ 変換の適当な 2 つの組み合わせが，ラグランジアン (7.51) のもつ 2 つの $GL(1,\mathbb{R})^+$ 対称性の変換である．

10 次元で重力場だけがある場合は，D 次元の対称性は $SL(d,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R})^+$ であった．超重力多重項に含まれる 2 階の反対称テンソル場を加えると，この対称性は $SO(d,d)\times GL(1,\mathbb{R})^+$ に拡大される．さらに，n 個の超 Yang–Mills 多重項を加えると，対称性は $SO(d,d+n)\times GL(1,\mathbb{R})^+$ に拡大されることがわかった．$SO(d,d+n)$ 変換は，超重力多重項と超 Yang–Mills 多重項を混ぜ合わせる変換を含んでいる．このような異なる超多重項を結びつける変換に対する対称性は，他の超重力理論でも存在することが知られている．

$D = 10$, $\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論を低エネルギー有効理論としてもつヘテロ型弦理論は，この $SO(d,d+n)$ の離散的部分群 $SO(d,d+n,\mathbb{Z})$ の対称性をもち，その変換によって結びついている弦理論は等価な理論であることが知られている[*12)]．

$SO(d,d+n)/[SO(d)\times SO(d+n)]$ 非線形シグマ模型

行列 $\mathcal{M}$ に含まれる d^2+dn 個のスカラー場は，$SO(d,d+n)/[SO(d)\times SO(d+n)]$ 非線形シグマ模型によって表すことができる．スカラー場から $(2d+n)\times(2d+n)$ 行列

$$V = \begin{pmatrix} V^\alpha{}_i & V^{\alpha i} & V^{\alpha\hat{I}} \\ V_{\alpha i} & V_\alpha{}^i & V_\alpha{}^{\hat{I}} \\ V_{Ii} & V_I{}^i & V_I{}^{\hat{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'^{\alpha}_i & 0 & 0 \\ -E'^{\beta}_i C_{\beta\alpha} & E'_\alpha{}^i & a_\alpha{}^{\hat{I}} \\ -E'^{\beta}_i a_\beta{}^I & 0 & \delta^{\hat{I}}_I \end{pmatrix} \tag{7.56}$$

をつくる．ここで，$E'_\alpha{}^i = e^{\frac{1}{4}\hat{\phi}}E_\alpha{}^i$, $E'^{\alpha}_i = e^{-\frac{1}{4}\hat{\phi}}E_i{}^\alpha$ である．$\hat{I},\hat{J},\cdots$ は，$I,J,\cdots$ と同じく，1 から n までの値を取るとする．2 番目の式は，行列の成分の添字の付き方を表している．この V は，$V^T\eta V = \eta$ を満たし，$SO(d,d+n)$ の元であることがわかる．これを使うと，行列 (7.49) を，$\mathcal{M} = VV^T$ と表すことができる．

4.1 節にしたがって，この V の微分から

---

*12） A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Phys. Rept.* **244** (1994) 77.

$$V^{-1}\,\partial_\mu V = P_\mu + Q_\mu \tag{7.57}$$

のように，$SO(d)\times SO(d+n)$ 部分 Lie 代数の部分 Q_μ とそれに直交する部分 P_μ を定義する．$SO(d,d+n)$ Lie 代数の $SO(d)\times SO(d+n)$ 部分 Lie 代数の元は，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ -c^T & -c^T & d \end{pmatrix} \qquad (a^T=-a,\ b^T=-b,\ d^T=-d) \tag{7.58}$$

と書ける．(行列 η が対角行列になるような基底で考え，それを元の基底に戻すとわかりやすい.) この部分 Lie 代数に直交する行列は，(7.55) と (7.58) から，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ c^T & -c^T & 0 \end{pmatrix} \qquad (a^T=a,\ b^T=-b) \tag{7.59}$$

と書けることがわかる．$V^{-1}\partial_\mu V$ を，(7.59) と (7.58) の形に分解すると，P_μ と Q_μ が得られる．P_μ を具体的に求めると，

$$P_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -X_{\mu ij} & -Y_{\mu ij} & -Z_{\mu i\hat{j}} \\ Y_{\mu ij} & X_{\mu ij} & Z_{\mu i\hat{j}} \\ -Z_{\mu j\hat{\imath}} & Z_{\mu j\hat{\imath}} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.60}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} X_{\mu ij} &= {E'}_i{}^\alpha\,\partial_\mu {E'}_{\alpha j} + {E'}_j{}^\alpha\,\partial_\mu {E'}_{\alpha i}, \\ Y_{\mu ij} &= {E'}_i{}^\alpha\,{E'}_j{}^\beta(\partial_\mu B_{\alpha\beta} + a_{[\alpha}{}^I\,\partial_\mu a_{\beta]}{}^I), \\ Z_{\mu i\hat{j}} &= {E'}_i{}^\alpha\,\partial_\mu a_{\alpha\hat{j}} \end{aligned} \tag{7.61}$$

とおいた．これを使うと，スカラー場 $\mathcal{M}$ の運動項は，

$$\frac{1}{8}\,e\ \mathrm{tr}\left(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu\mathcal{M}\right) = -\frac{1}{2}\,e\ \mathrm{tr}\,(P_\mu\,P^\mu) \tag{7.62}$$

と書ける．

$D=4$ 理論

$D=4$ の場合は，反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ を双対なスカラー場 $\tilde{B}$ に置き換えることができ，$\mathcal{N}=4$ 超重力多重項と $n+6$ 個のゲージ多重項の結合した理論が得られる．この理論の場の方程式は，$SO(d,d+n)\times GL(1,\mathbb{R})^+$ を部分群として含むより大きな大局的 $SO(d,d+n)\times SL(2,\mathbb{R})$ 対称性をもつ[*13]．$SL(2,\mathbb{R})$ は，ベクトル場に対しては双対変換として作用する．

1.6.1 節の方法によって，双対な場 $\tilde{B}$ を使ったラグランジアンを求めると，

*13) A. Sen, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 3707.

$$\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\left(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + e^{2\phi}\,\partial_\mu\tilde{B}\,\partial^\mu\tilde{B}\right) + \frac{1}{8}\,e\ \mathrm{tr}\left(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu\mathcal{M}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\,e\,e^{-\phi}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\tilde{B}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\eta\,\mathcal{F}_{\rho\sigma} \tag{7.63}$$

となる．スカラー場 ϕ と $\tilde{B}$ の運動項は，(4.16) と同じ形をしており，$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ 非線形シグマ模型で記述できることがわかる．ラグランジアンを見やすい形に書き直すために，スカラー場を使って，

$$\tau = \tilde{B} + i\,e^{-\phi}, \qquad K = e^{-\phi}\,\mathcal{M}^{-1} - \tilde{B}\,\eta\,* \tag{7.64}$$

とおく．$*$ は Hodge 双対演算子である．これらを使うと，ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\frac{\partial_\mu\tau^*\,\partial^\mu\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2} + \frac{1}{8}\,e\ \mathrm{tr}\left(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu\mathcal{M}\right) - \frac{1}{4}\,e\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,K\,\mathcal{F}^{\mu\nu} \tag{7.65}$$

となる．複素スカラー場 τ の運動項は，無限小 $SL(2,\mathbb{R})$ 変換

$$\delta\,\tau = C + (D - A)\,\tau - B\,\tau^2 \qquad (A,\ B,\ C,\ D\ \text{は実数}) \tag{7.66}$$

に対して不変である．この変換に対して K は，

$$\delta\,K = -KA' - KB'K\,* - C'\,* + D'K \tag{7.67}$$

と変換する．ここで，

$$A' = A\,\mathbf{1}, \quad B' = B\,\eta, \quad C' = C\,\eta, \quad D' = D\,\mathbf{1} \tag{7.68}$$

とおいた．この K の変換は 4.2 節の (4.47) の形であり，ラグランジアン (7.65) は (4.48) の形をしている．したがって，ベクトル場 $\mathcal{A}_\mu$ に対する場の方程式と Bianchi 恒等式は，$SL(2,\mathbb{R})$ 双対変換に対して不変である．

$D = 5$ 理論

$D = 5$ の場合は，反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ を双対なベクトル場 $\tilde{B}_\mu$ に置き換えることができる．双対な場を使ったラグランジアンを求めると，

$$\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{8}\,e\ \mathrm{tr}\left(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu\mathcal{M}\right) - \frac{1}{4}\,e\,e^{\sqrt{\frac{8}{3}}\phi}\,\tilde{F}_{\mu\nu}\,\tilde{F}^{\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{4}\,e\,e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\eta\,\mathcal{F}_{\rho\sigma}\,\tilde{B}_\tau \tag{7.69}$$

となる．ここで，$\tilde{F}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\tilde{B}_{\nu]}$ は，$\tilde{B}_\mu$ の場の強さである．$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ に比例した Chern–Simons 型の項が現れていることがわかる．これは，$\mathcal{N} = 4$ 超重力多重項と $n + 5$ 個のゲージ多重項が結合した理論のボソン場のラグランジアンである．

$D = 6$ 理論

$D = 6$ の場合は，反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ に双対な場は，再び 2 階反対称テ

ンソル場 $\tilde{B}_{\mu\nu}$ であり，含まれている場の種類は変わらない．しかし，ラグランジアンは別の形になる．実際，双対な場を使ったラグランジアンを求めると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{8}\,e\ \mathrm{tr}\left(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}\,\partial^\mu\mathcal{M}\right) - \frac{1}{12}\,e\,e^{\sqrt{2}\phi}\,\tilde{F}_{\mu\nu\rho}\,\tilde{F}^{\mu\nu\rho} \\ -\frac{1}{4}\,e\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{16}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau\lambda}\,\mathcal{F}^T_{\mu\nu}\,\eta\,\mathcal{F}_{\rho\sigma}\,\tilde{B}_{\tau\lambda}\end{aligned} \tag{7.70}$$

となる．ここで，$\tilde{F}_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}\tilde{B}_{\nu\rho]}$ は，双対な場の場の強さである．元の場 $B_{\mu\nu}$ を使ったラグランジアン (7.51) と比較すると，反対称テンソル場の場の強さ (7.52) にあった Chern–Simons 項がなくなり，その代わりに，あらわな Chern–Simons 項がラグランジアンに付け加わっている．また，反対称テンソル場の運動項のスカラー場因子 $e^{\sqrt{2}\phi}$ が逆数になっている．この双対な場を含んだラグランジアンは，IIA 型超弦理論を 4 次元多様体 K3 を使ってコンパクト化したときの低エネルギー有効理論を表している*14)．

*14)　第 1 章の脚注 *2) の論文．

第 8 章
アノマリー

場の量子論では，古典的な理論がもっていた対称性が，量子効果によって壊れている場合がある．そのような場合，理論にアノマリーがあるという．理論が無矛盾であるためには，局所対称性に対するアノマリーは相殺していなければならない．この章では，まず，ゲージ変換や局所 Lorentz 変換に対するアノマリーの一般論について述べ，それを超重力理論に応用する．特に，超重力理論でアノマリーがどのように相殺しているかを議論する．

8.1　局所対称性のアノマリー

古典的な理論のもつ対称性が量子論で壊れている場合に，その対称性には**アノマリー**（anomaly, **量子異常**）があるという．場の量子論では，無限大の自由度があるために**紫外発散**が現れ，散乱振幅などの計算をする際には，発散を有限にするための**正則化**（regularization）の操作が必要である．正則化の方法にはいろいろな種類があるが，通常は理論のもつ対称性を保つ方法が選ばれる．たとえば，量子電気力学（QED）では，Pauli–Villars 正則化や次元正則化のようなゲージ対称性を保つ正則化が使われる．しかし，どのような正則化の方法を選んでも対称性が保たれない場合があり，そのような場合，一般には量子論では対称性が保たれない．これがアノマリーである．

アノマリーは，大局的対称性にも局所的対称性にも現れる可能性がある．大局的対称性のアノマリーの例としては，量子電気力学や量子色力学（QCD）における軸性 $U(1)$ 変換 $\psi(x) \to e^{i\theta\gamma_5}\psi(x)$ に対する対称性のアノマリーがある．このアノマリーは物理的な意味をもち，$\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の説明や $U(1)_A$ 問題の解決などに使われる．一方，局所的対称性のアノマリーは，理論が矛盾をもたないためには相殺している必要がある．たとえば，量子電気力学のゲージ対称性は，電磁場の時間成分 $A_0(x)$ の自由度を取り除き，負のノルムをもつ状態が現れないようにするために重要である．もし，ゲージ対称性にアノマリーがあ

ると，負ノルム状態が現れ，理論のユニタリティが成り立たなくなってしまう．

局所対称性のアノマリーの相殺は，理論に含まれる場の種類に制限を与える．たとえば，素粒子の標準理論に含まれているクォークやレプトンは，ゲージ対称性のアノマリーがちょうど相殺するような量子数をもっているが，これに余分なフェルミオン場を付け加えると，一般にはアノマリーが現れてしまう．この章では，いろいろな超重力理論でアノマリーが相殺しているかどうかを調べる．

局所対称性のアノマリーの例として，4 次元時空でゲージ場 $A_\mu^I(x)$ に結合した負カイラリティの Weyl スピノール場 $\psi_-(x)$ を考えてみよう．ゲージ場を古典的な背景場とみなし，スピノール場だけを量子化する．スピノール場の作用は，

$$S[\psi_-,\, \bar{\psi}_-,\, A_\mu] = -\int d^4x\, \bar{\psi}_-\, \gamma^\mu\, (\partial_\mu + A_\mu)\, \psi_- \tag{8.1}$$

で与えられる．ここで，$A_\mu = -igA_\mu^I T_I$ であり，T_I はゲージ群のリー代数の表現行列，g はゲージ結合定数である．この作用は，変換のパラメータを $v(x) = -iv^I(x)T_I$ とするゲージ変換

$$\begin{aligned} \delta_g(v)\, A_\mu &= \partial_\mu\, v + [A_\mu, v] \equiv D_\mu\, v, \\ \delta_g(v)\, \psi_- &= -v\, \psi_- \end{aligned} \tag{8.2}$$

に対して不変である．スピノール場についての経路積分

$$e^{iW[A_\mu]} = \int \mathcal{D}\,\psi_-\, \mathcal{D}\,\bar{\psi}_-\, e^{iS[\psi_-,\bar{\psi}_-,A_\mu]} \tag{8.3}$$

によって，**有効作用** $W[A_\mu]$ を定義する．(さらに，$W[A_\mu]$ にゲージ場の運動項を付け加えて，ゲージ場について経路積分を行えば，ゲージ場も量子化されることになる.）量子論でゲージ対称性が保たれているとすると，$W[A_\mu]$ はゲージ変換に対して不変になっているはずである．しかし，実際に Feynman 図を使った摂動論的計算によって $W[A_\mu]$ のゲージ変換

$$G_g[v,\, A_\mu] = \delta_g(v)\, W[A_\mu] \tag{8.4}$$

を計算すると，

$$G_g[v, A_\mu] = -\frac{i}{24\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\big[v\,\partial_\mu\, \big(A_\nu\, \partial_\rho A_\sigma + \tfrac{1}{2}\, A_\nu\, A_\rho\, A_\sigma\big)\big] \tag{8.5}$$

というゼロではない結果が得られる*1)．したがって，量子論ではゲージ対称性が保たれていない．アノマリー (8.5) の第 1 項は，A_μ についての 2 次式で，図 8.1 のようなフェルミオン場のループを含む三角形ダイアグラムを計算して，それをゲージ変換することによって得られる．この計算ではゲージ対称性を保つような正則化は存在しない．

*1） くわしくは，参考文献 [2]–[4] を参照せよ．

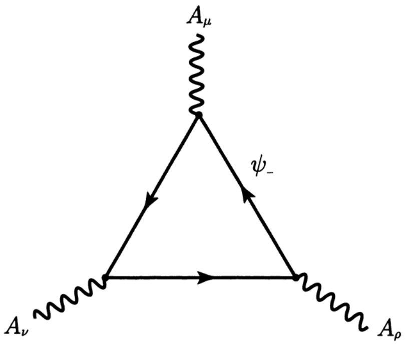


図 8.1 フェルミオンループの三角形ダイアグラム．

アノマリーの存在は，ゲージ場に結合したカレントが保存しないことを意味している．背景ゲージ場がある場合のカレントの真空期待値は，

$$\langle j^\mu(x)\rangle = \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu(x)} \tag{8.6}$$

と表される．これを使うと，$W[A_\mu]$ のゲージ変換は，

$$\delta_g(v)\, W = \int d^4x\, \mathrm{tr}\left[D_\mu\, v\, \frac{\delta W}{\delta A_\mu}\right] = -\int d^4x\ \mathrm{tr}\,[v\,\langle D_\mu\, j^\mu\rangle] \tag{8.7}$$

と書ける．したがって，$G_g[v, A_\mu] \neq 0$ は，カレントの非保存を意味する．

アノマリー自身の形はゲージ不変ではないが，その変換性はある条件を満たしている．まず，ゲージ変換 (8.2) は，閉じた交換関係

$$[\delta_g(v_1),\, \delta_g(v_2)] = \delta_g([v_1, v_2]) \tag{8.8}$$

をもつ．この両辺を $W[A_\mu]$ に作用させると，$G_g[v, A_\mu]$ に対する条件式

$$\delta_g(v_1)\, G_g[v_2, A_\mu] - \delta_g(v_2)\, G_g[v_1, A_\mu] = G_g[[v_1, v_2], A_\mu] \tag{8.9}$$

が得られる．これは **Wess–Zumino 無矛盾性条件**[*2] と呼ばれ，(8.4) のように，アノマリーが，ある量のゲージ変換として与えられていることの結果である．この条件はゲージ場 A_μ について非線形な形をしており，アノマリーの最低次の項が与えられると，この条件を使って高次の項を決めることができる．

有効作用 $W[A_\mu]$ は非局所的な汎関数であり，時空の異なる点における場の値の積を含んでいる．しかし，そのゲージ変換として得られるアノマリー $G_g[v, A_\mu]$ は局所的な汎関数になっている．このことは，アノマリーが場の理論の紫外発散を原因として現れ，理論の短距離の（局所的な）性質を表しているということから理解できる．場の理論では，紫外発散を相殺するためにラグランジアンに局所的な**相殺項**（counterterm）を付け加える．相殺項の有限部分には任意性があるが，通常は，理論の対称性を保つように選ばれる．たとえば，量子電

*2） J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **B37** (1971) 95.

気力学では，ゲージ不変性を保つように選ばれる．しかし，アノマリーがある場合は，どのような相殺項を選んでも対称性を保つことができない．

8.2 微分形式

微分形式は，ベクトル場や反対称テンソル場を扱う際に便利な表記法である．ここでは，アノマリーの計算を見通しよく行うための数学的方法として，簡単に紹介する*3)．

p 階の反対称テンソル場の成分 $\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}(x)$ を使って，

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}(x)\,dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \tag{8.10}$$

とおき，これを**微分形式**（differential form）とよぶ．ここで，$dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$ は反対称テンソル場の基底であり，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p$ の中の任意の 2 つの入れ換えに対して反対称である．$\wedge$ は**ウェッジ積**（wedge product）とよばれ，

$$dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} = -dx^{\nu}\wedge dx^{\mu} \tag{8.11}$$

を満たす．座標変換 $x^{\mu}\to x'^{\mu}=x'^{\mu}(x)$ に対して，基底の変換性が

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\,dx^{\nu} \tag{8.12}$$

であるとすると，微分形式は座標の選び方によらない量である．

反対称テンソル場の階数 p を微分形式の**次数**（degree）といい，次数が p の微分形式を p–形式（p–form）とよぶ．また，微分形式の次数 p をあらわに示すには，ω_p のように書く．たとえば，

$$\begin{aligned}
&0\text{–形式：}\ \ \phi_0 = \phi(x),\\
&1\text{–形式：}\ \ A_1 = A_{\mu}(x)\,dx^{\mu},\\
&2\text{–形式：}\ \ B_2 = \frac{1}{2}\,B_{\mu\nu}(x)\,dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

などである．p–形式 A_p と q–形式 B_q のウェッジ積を，

$$A_p\wedge B_q = \frac{1}{p!q!}\,A_{[\mu_1\cdots\mu_p}\,B_{\mu_{p+1}\cdots\mu_{p+q}]}\,dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{p+q}} \tag{8.14}$$

と定義する．2 つの微分形式の入れ換えに対して，

$$A_p\wedge B_q = (-1)^{pq}\,B_q\wedge A_p \tag{8.15}$$

が成り立つ．奇数次数の微分形式どうしの場合は反交換し，それ以外の場合は交換する．

---

*3) よりくわしくは，参考文献 [24], [25] を参照せよ．

微分形式の**外微分**（exterior derivative）を，

$$d\,B = \frac{1}{p!}\,\partial_{[\mu_1} B_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}\,dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{p+1}} \tag{8.16}$$

によって定義する．つまり，成分を微分して，すべての添字について完全反対称化したものである．外微分は，p–形式から $(p+1)$–形式をつくる演算である．たとえば，(8.13) の外微分は，

$$\begin{aligned} d\,\phi_0 &= \partial_\mu \phi\, dx^\mu, \\ d\,A_1 &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) dx^\mu\wedge dx^\nu, \\ d\,B_2 &= \frac{1}{3!}\left(\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}\right) dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho \end{aligned} \tag{8.17}$$

となる．任意の微分形式 A_p, B_q に対して，

$$\begin{aligned} &\text{分配法則：}\ d\,(A_p\wedge B_q) = d\,A_p\wedge B_q + (-1)^p A_p\wedge d\,B_q, \\ &\text{冪ゼロ性：}\ d^2 A_p = 0 \end{aligned} \tag{8.18}$$

が成り立つ．

微分形式 A_p が，$dA_p = 0$ を満たすとき，A_p を**閉形式**（closed form）という．また，p–形式 A_p が，ある $(p-1)$–形式 χ_{p-1} を使って $A_p = d\chi_{p-1}$ と表されるとき，A_p を**完全形式**（exact form）という．外微分の冪ゼロ性から，任意の完全形式は閉形式である．この逆は一般には成り立たない．つまり，閉形式だが完全形式ではない微分形式が存在しうる．しかし，局所的には逆も成り立つ：A_p が閉形式ならば，任意の点の適当な近傍で，ある $(p-1)$–形式 χ_{p-1} が存在して，$A_p = d\chi_{p-1}$ と表せる（**Poincaré の補題**[*4)]）．

D 次元多様体 M_D 上の D–形式

$$\begin{aligned} \omega_D &= \frac{1}{D!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_D}\,dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D} \\ &= \frac{1}{D!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_D}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^D \end{aligned} \tag{8.19}$$

に対して，M_D 上の積分を，

$$\int_{M_D}\omega_D = \int_{M_D}\frac{1}{D!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_D}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\,d^D x \tag{8.20}$$

と定義する．ここで，$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}$ は完全反対称な Levi–Civita 記号である．図 8.2 のように，M_D が $D-1$ 次元の境界 ∂M_D をもつ場合は，**Stokes の定理**

$$\int_{M_D} d\,\omega_{D-1} = \int_{\partial M_D}\omega_{D-1} \tag{8.21}$$

が成り立つ．

---

*4)　この補題の正確な内容については，脚注 *3) の参考文献を参照せよ．

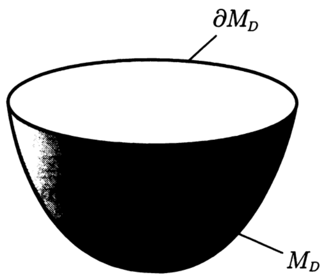


図 8.2　多様体 M_D とその境界 ∂M_D.

8.3 ゲージアノマリー

微分形式を使って，Wess–Zumino 条件 (8.9) を満たすアノマリーの形を求めよう．まず，ゲージ場を，行列に値をもつ 1–形式

$$A = -i\, g\, A^I_\mu(x)\, T_I\, dx^\mu \tag{8.22}$$

で表す．T_I はゲージ群の Lie 代数の表現行列である．場の強さは，2–形式

$$F = d\, A + A \wedge A = -\frac{1}{2}\, i\, g\, F^I_{\mu\nu}(x)\, T_I\, dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{8.23}$$

によって表される．この式に外微分を作用させることにより，Bianchi 恒等式

$$D\, F \equiv d\, F + A \wedge F - F \wedge A = 0 \tag{8.24}$$

が得られる．無限小ゲージ変換は，$v(x) = -iv^I(x)\, T_I$ を変換のパラメータとして，

$$\delta_g(v)\, A = d\, v + [A,\, v] \equiv D\, v, \qquad \delta_g(v)\, F = [F,\, v] \tag{8.25}$$

と書ける．

一般の偶数次元 $D = 2n$ において，Wess–Zumino 条件 (8.9) を満たすアノマリーの形を次のように構成することができる*5)．まず，F の $n+1$ 次多項式からつくられたゲージ不変な $(2n+2)$–形式を $I_{2n+2}(F)$ とする．$2n$ 次元では，$(2n+2)$–形式は恒等的にゼロであるが，形式的にそのような量を考える．たとえば，$\mathrm{tr}\, F^{n+1}$ や $\mathrm{tr}\, F^p\, \mathrm{tr}\, F^{n-p+1}$ などがその例である（以下では，簡単のためウェッジ積の記号を省略する.）．ゲージ不変性から

$$\delta_g(v)\, I_{2n+2}(F) = 0 \tag{8.26}$$

が成り立つ．この式と Bianchi の恒等式から，$I_{2n+2}(F)$ が閉形式であること

$$d\, I_{2n+2}(F) = 0 \tag{8.27}$$

*5)　B. Zumino, Y.S. Wu and A. Zee, *Nucl. Phys.* **B239** (1984) 477.

がわかる．したがって，Poincaré の補題により，局所的には $(2n+1)$–形式 $I^0_{2n+1}(A)$ が存在して，

$$I_{2n+2}(F) = d\,I^0_{2n+1}(A) \tag{8.28}$$

が成り立つ．$I^0_{2n+1}(A)$ を **Chern–Simons 形式**と呼ぶ．(8.28) の両辺をゲージ変換すると，左辺は (8.26) からゼロになり，$d\delta_g(v)I^0_{2n+1} = 0$ が得られる．したがって，局所的には $2n$–形式 $I^1_{2n}(v, A)$ が存在して，

$$\delta_g(v)\,I^0_{2n+1}(A) = d\,I^1_{2n}(v, A) \tag{8.29}$$

が成り立つ．I_{2n+2} が与えられたとき，それから I^0_{2n+1}, I^1_{2n} を順番に決める式 (8.28), (8.29) を**降下方程式**（descent equation）とよぶ．この I^1_{2n} の $2n$ 次元時空 M_{2n} 上の積分を

$$G_g(v, A) = \int_{M_{2n}} I^1_{2n}(v, A) \tag{8.30}$$

とおくと，$G_g(v, A)$ は Wess–Zumino 条件 (8.9) を満たす．実際，$2n$ 次元時空を境界とする $2n+1$ 次元空間 B_{2n+1} ($\partial B_{2n+1} = M_{2n}$) を形式的に考え，Stokes の定理と (8.29) を使うと，

$$G_g(v, A) = \int_{B_{2n+1}} d\,I^1_{2n}(v, A) = \delta_g(v) \int_{B_{2n+1}} I^0_{2n+1}(A) \tag{8.31}$$

と表すことができる．したがって，$G_g(v, A)$ がある量のゲージ変換として書けているので，それが Wess–Zumino 条件を満たすことがわかる．

I_{2n+2} が与えられたとき，(8.28) を満たす I^0_{2n+1} の選び方には任意性がある．実際，外微分の冪ゼロ性 $d^2 = 0$ から，I^0_{2n+1} に完全形式 $d\Delta\mathcal{L}[\mathcal{A}]$（$\Delta\mathcal{L}$ は，任意の局所的 $2n$–形式）を付け加えても，同じ I_{2n+2} を与える．この任意性は，有効作用 $W[A]$ に局所相殺項 $\Delta W[A] = \int \Delta\mathcal{L}$ を付け加える任意性に相当する．

これで，ゲージ不変な $(2n+2)$–形式 I_{2n+2} が求められれば，アノマリーの形が決まることがわかった．与えられた理論で I_{2n+2} を求める方法としては，(i) Feynman ダイアグラムの計算，(ii) 経路積分の積分測度の変換のヤコビアンを計算する藤川の方法*6)，(iii) 指数定理を使った方法*7) などがある．これらの方法によると，(8.1) の形の作用をもつ $2n$ 次元時空におけるスピノール場の場合，アノマリーに対する $(2n+2)$–形式は，

$$I_{2n+2}(F) = \frac{i^{n+1}}{(2\pi)^n(n+1)!}\,\mathrm{tr}\,F^{n+1}\,, \tag{8.32}$$

で与えられる．ただし，ゲージ場 (8.22) は，ゲージ群のスピノール場の属す表現行列で書けているものとする．この場合の $I^0_{2n+1}(v, A)$, $I^1_{2n}(v, A)$ の具体的

*6) K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195; *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2848 [*Erratum-ibid.* **D22** (1980) 1499].

*7) 参考文献 [25] を参照せよ．

な形は

$$
\begin{aligned}
I^0_{2n+1}(v,A) &= \frac{i^{n+1}}{(2\pi)^n n!}\int_0^1 dt\ \mathrm{tr}\,(A\,F_t^n)\,,\\
I^1_{2n}(v,A) &= \frac{i^{n+1}}{(2\pi)^n (n-1)!}\int_0^1 dt\,(1-t)\,\mathrm{tr}\left[v\,dS(A,F_t^{n-1})\right]
\end{aligned}
\tag{8.33}
$$

と表すことができる（脚注 *5) の論文を参照）．ここで，

$$
F_t = t\,d\,A + t^2\,A^2 \tag{8.34}
$$

である．また，n 個の行列 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ の対称化された積

$$
S(M_1, M_2, \cdots, M_n) = \frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)} M_{i_1}M_{i_2}\cdots M_{i_n} \tag{8.35}
$$

を使った．$\displaystyle\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}$ は，$(1,2,\cdots,n)$ のすべての順列についての和を表す．(8.33) で $n=2$ とすると，4 次元時空のアノマリー (8.5) が得られる．

8.4 重力アノマリー

重力場を含んだ理論では，一般座標変換や局所 Lorentz 変換に対するアノマリーが現れる場合がある．これらは，**重力アノマリー**[*8] とよばれる．重力アノマリーは，時空の次元が $D=4k+2$（k は整数）のときだけ現れる可能性がある．一般座標変換に対するアノマリーと局所 Lorentz 変換に対するアノマリーは，適当な局所相殺項をラグランジアンに付け加えることによって，お互いに取り換えることができる[*9]．ここでは，一般座標変換に対する不変性は保たれており，局所 Lorentz 変換に対するアノマリーだけがあるように相殺項が選ばれていると仮定する．

ゲージアノマリーの場合と同様に，微分形式を使うと便利である．スピン接続と Riemann テンソルは，それぞれ，微分形式

$$
\begin{aligned}
&\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(x)\,dx^\mu,\\
&R^a{}_b = d\,\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b = \frac{1}{2}\,R_{\mu\nu}{}^a{}_b(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu
\end{aligned}
\tag{8.36}
$$

によって表される．$R^a{}_b$ の式に外微分を作用させることにより，Bianchi 恒等式

$$
D\,R \equiv d\,R + [\omega,\,R] = 0 \tag{8.37}
$$

が得られる．無限小局所 Lorentz 変換は，$\lambda^a{}_b(x)$ を変換のパラメータとして，

$$
\delta_L(\lambda)\,\omega = d\,\lambda + [\omega,\,\lambda] \equiv D\,\lambda, \qquad \delta_L(\lambda)\,R = [R,\,\lambda] \tag{8.38}
$$

*8) L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234** (1983) 269.

*9) W.A. Bardeen and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B244** (1984) 421; L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *Ann. Phys.* **161** (1985) 423 [*Erratum-ibid.* **171** (1986) 233].

と書ける．

(8.36)–(8.38) は，ゲージ理論の場合の (8.22)–(8.25) と同じ形をしているので，その場合と同様に局所 Lorentz 変換に対する Wess–Zumino 条件を満たすアノマリーを構成することができる．$I_{2n+2}(R)$ を局所 Lorentz 変換不変な $(2n+2)$–形式とすると，$(2n+1)$–形式 $I^0_{2n+1}(\omega)$ と $2n$–形式 $I^1_{2n}(\lambda,\omega)$ が存在して，降下方程式

$$\begin{aligned} &I_{2n+2}(R) = d\,I^0_{2n+1}(\omega), \\ &\delta_L(\lambda)\,I^0_{2n+1}(\omega) = d\,I^1_{2n}(\lambda,\omega) \end{aligned} \tag{8.39}$$

が成り立つ．Wess–Zumino 条件を満たす重力アノマリーは，

$$G_L(\lambda,\omega) = \int_{M_{2n}} I^1_{2n}(\lambda,\omega) \tag{8.40}$$

によって与えられる．出発点の不変な $(2n+2)$–形式 I_{2n+2} は，ゲージアノマリーの場合と同様に，Feynman ダイアグラムの計算や，藤川の方法，指数定理を使った方法などによって求めることができる．その結果は，次の節で与える．

8.5 アノマリーの公式

ゲージ場と重力場の両方を含む理論では，ゲージアノマリーや重力アノマリーは，両方の場に依存することがある．これらは，**混合アノマリー**（mixed anomaly）とよばれる．このようなアノマリーについても，ゲージ変換と局所 Lorentz 変換に対して不変な $(2n+2)$–形式から出発して，降下方程式によって Wess–Zumino 条件を満たすアノマリーの形を構成することができる．

超重力理論に現れる場に対して，ゲージ変換と局所 Lorentz 変換のアノマリーの公式を求めよう．超重力理論に現れる場のうち，アノマリーに寄与するものは，(（擬）Majorana–）Weyl スピノール場，(（擬）Majorana–）Weyl Rarita–Schwinger 場，(反) 自己双対反対称テンソル場である．これらの場によるアノマリーに対応する不変な $(2n+2)$–形式は，

$$\begin{aligned} &I^{(1/2)}_{2n+2}(F,R) = 2\pi\left[\hat{A}(R)\,\mathrm{ch}(F)\right]_{2n+2}, \\ &I^{(3/2)}_{2n+2}(F,R) = 2\pi\left[\hat{A}(R)\,(2n-1+\mathrm{tr}(\cos R-1))\,\mathrm{ch}(F)\right]_{2n+2}, \\ &I^{(A)}_{2n+2}(R) = 2\pi\left[-\frac{1}{8}\,L(R)\right]_{2n+2} \end{aligned} \tag{8.41}$$

で与えられる．負カイラリティ Weyl スピノール場による寄与を $I^{(1/2)}_{2n+2}$，負カイラリティ Weyl Rarita–Schwinger 場による寄与を $I^{(3/2)}_{2n+2}$，反自己双対な反対称テンソル場の寄与を $I^{(A)}_{2n+2}$ とした．正カイラリティや自己双対な場の場合は，逆符号の寄与になる．(擬) Majorana 条件を満たす場合は，上の式の半分の寄与になる．$[\,\cdots]_{2n+2}$ は，括弧内に現れるいろいろな次数の微分形式のうち，

$(2n+2)$–形式だけを取り出すことを意味する．$\mathrm{ch}(F)$ は **Chern 指標**（Chern character），$\hat{A}(R)$ は **Dirac 種数**（Dirac index），$L(R)$ は **Hirzebruch L 多項式**（Hirzebruch L-polynomial）と呼ばれる量で，

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(F) &= \mathrm{tr}\, e^{iF/2\pi}, \\ \hat{A}(R) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i/2}{\sinh(\lambda_i/2)}, \\ L(R) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\tanh \lambda_i} \end{aligned} \tag{8.42}$$

によって定義されている．ここで，曲率 2–形式 $R^a{}_b$ を成分とする $2n \times 2n$ 行列を，Lorentz 変換によって，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \mathbf{0} & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & \mathbf{0} & & & & & 0 & \lambda_n \\ & & & & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} \tag{8.43}$$

としたときの成分を λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とおいた*10)．これらの量は，**特性類***11)（characteristic class）とよばれるものであり，場の強さと曲率テンソルの 2–形式について展開することができる．12–形式の項まで展開すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(F) &= r + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}\,F + \frac{i^2}{2(2\pi)^2}\,\mathrm{tr}\,F^2 + \cdots + \frac{i^6}{6!(2\pi)^6}\,\mathrm{tr}\,F^6 + \cdots, \\ \hat{A}(R) &= 1 + \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{12}\,\mathrm{tr}\,R^2 + \frac{1}{(4\pi)^4}\left[\frac{1}{288}(\mathrm{tr}\,R^2)^2 + \frac{1}{360}\,\mathrm{tr}\,R^4\right] \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^6}\left[\frac{1}{10368}(\mathrm{tr}\,R^2)^3 + \frac{1}{4320}\,\mathrm{tr}\,R^2\,\mathrm{tr}\,R^4 + \frac{1}{5670}\,\mathrm{tr}\,R^6\right] \\ &\quad + \cdots, \\ L(R) &= 1 - \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,R^2 + \frac{1}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{72}(\mathrm{tr}\,R^2)^2 - \frac{7}{180}\,\mathrm{tr}\,R^4\right] \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^6}\left[-\frac{1}{1296}(\mathrm{tr}\,R^2)^3 + \frac{7}{1080}\,\mathrm{tr}\,R^2\,\mathrm{tr}\,R^4 - \frac{31}{2835}\,\mathrm{tr}\,R^6\right] \\ &\quad + \cdots \end{aligned} \tag{8.44}$$

となる．r は，ゲージ群の表現の次元である．

---

*10) 正確には，(8.43) は時空を Euclid 化して考えたときの式である．

*11) 参考文献 [24], [25] を参照せよ．

8.6 アノマリーの相殺

この章でこれまで述べたことを使って，超重力理論におけるゲージアノマリーと重力アノマリーの相殺について考える．まず，$D=11, \mathcal{N}=1$ 超重力理論のような奇数次元の理論にはこれらのアノマリーは現れない．また，偶数次元でも，$D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ のような非カイラルな理論では，正と負のカイラリティをもつ場の寄与が相殺するため，アノマリーは現れない．アノマリーが現れる可能性があるのは，偶数次元のカイラルな（カイラリティに関して正負非対称な）理論である．以下では，10 次元のカイラルな $\mathcal{N}=(2,0)$ 理論と $\mathcal{N}=(1,0)$ 理論におけるアノマリーの相殺について考える．

8.6.1 $D = 10, \mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論

この理論でアノマリーに寄与する場は，2 個の正カイラリティ Majorana–Weyl Rarita–Schwinger 場 $\psi_{\mu+}$, 2 個の負カイラリティ Majorana–Weyl スピノール場 λ_-, 1 個の自己双対反対称テンソル場 $B^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ である．これらの場はゲージ場には結合していないので，重力アノマリーだけが現れる．アノマリーに対応する 12–形式は，

$$I_{12} = -I_{12}^{(3/2)}(R,0) + I_{12}^{(1/2)}(R,0) - I_{12}^{(A)}(R,0) \tag{8.45}$$

となる．$2n = 10$ の場合の展開 (8.44) を使うと，3 種類の場それぞれからはゼロでない寄与

$$\begin{aligned}
I_{12}^{(3/2)}(R,0) &= \frac{1}{(4\pi)^5}\left[-\frac{7}{2304}(\mathrm{tr}\,R^2)^3 + \frac{5}{192}\,\mathrm{tr}\,R^2\,\mathrm{tr}\,R^4 - \frac{11}{252}\,\mathrm{tr}\,R^6\right], \\
I_{12}^{(1/2)}(R,0) &= \frac{1}{(4\pi)^5}\left[\frac{1}{20736}(\mathrm{tr}\,R^2)^3 + \frac{1}{8640}\,\mathrm{tr}\,R^2\,\mathrm{tr}\,R^4 + \frac{1}{11340}\,\mathrm{tr}\,R^6\right], \\
I_{12}^{(A)}(R,0) &= \frac{1}{(4\pi)^5}\left[\frac{1}{324}(\mathrm{tr}\,R^2)^3 - \frac{7}{270}\,\mathrm{tr}\,R^2\,\mathrm{tr}\,R^4 + \frac{124}{2835}\,\mathrm{tr}\,R^6\right]
\end{aligned} \tag{8.46}$$

がある．しかし，(8.45) の組み合わせではこれらは相殺し，この理論にはアノマリーがないことがわかる．

8.6.2 $D = 10, \mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論

次に，ゲージ群 G の超 Yang–Mills 理論に結合した $\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論を考えよう．超重力多重項の中のアノマリーに寄与する場は，1 個の正カイラリティ Majorana–Weyl Rarita–Schwinger 場 $\psi_{\mu+}$ と 1 個の負カイラリティ Majorana–Weyl スピノール場 λ_- である．超 Yang–Mills 多重項の中の場は，ゲージ群の随伴表現に属する正カイラリティ Majorana–Weyl スピノール場 χ_+ である．これらの場によるアノマリーに対応する 12–形式は，

$$I_{12} = -\frac{1}{2} I_{12}^{(3/2)}(R,0) + \frac{1}{2} I_{12}^{(1/2)}(R,0) - \frac{1}{2} I_{12}^{(1/2)}(R,F) \tag{8.47}$$

である．展開 (8.44) を使うと，

$$\begin{aligned} I_{12} = \frac{1}{2(4\pi)^5} \Bigg[& -\frac{\dim G - 64}{20736} (\operatorname{tr} R^2)^3 - \frac{\dim G + 224}{8640} \operatorname{tr} R^2 \operatorname{tr} R^4 \\ & -\frac{\dim G - 496}{11340} \operatorname{tr} R^6 + \left(\frac{1}{288} \left(\operatorname{tr} R^2\right)^2 + \frac{1}{360} \operatorname{tr} R^4 \right) \operatorname{Tr} F^2 \\ & -\frac{1}{36} \operatorname{tr} R^2 \operatorname{Tr} F^4 + \frac{2}{45} \operatorname{Tr} F^6 \Bigg] \end{aligned} \tag{8.48}$$

が得られる．ここで，$\dim G$ はゲージ群の次元を表し，tr と Tr は，それぞれ，Lorentz 群の基本表現（ベクトル表現）とゲージ群の随伴表現についてのトレースを表す．これらのアノマリーは，一般のゲージ群 G に対しては相殺しない．しかし，ゲージ群が $SO(32)$，または，$E_8 \times E_8$ の場合は，ラグランジアンに適当な局所項を付け加えることによって，アノマリーを相殺させることができる．この相殺の仕方は **Green–Schwarz 機構**[*12] とよばれている．

Green–Schwarz 機構が働くためには，アノマリーの各項が 2 つの因子の積の形になっている必要がある．そのためには，まず (8.48) の中の $\operatorname{tr} R^6$ の項の係数がゼロでなければならず，したがって，$\dim G = 496$ でなければならない．この条件は，$G = SO(32)$ と $G = E_8 \times E_8$ の場合は満たされている．また，これらのゲージ群の場合，$\operatorname{Tr} F^6$ の項も

$$\operatorname{Tr} F^6 = \frac{1}{48} \operatorname{Tr} F^2 \left[\operatorname{Tr} F^4 - \frac{1}{300} \left(\operatorname{Tr} F^2\right)^2 \right] \tag{8.49}$$

のように因子化できる．これらのことを使うと，(8.48) は

$$\begin{aligned} I_{12} &= \left(\operatorname{tr} R^2 - \frac{1}{30} \operatorname{Tr} F^2 \right) X_8, \\ X_8 &= \frac{1}{2(4\pi)^5} \Bigg[-\frac{1}{12} \operatorname{tr} R^4 - \frac{1}{48} \left(\operatorname{tr} R^2\right)^2 - \frac{1}{36} \operatorname{Tr} F^4 \\ &\qquad + \frac{1}{10800} \left(\operatorname{Tr} F^2\right)^2 + \frac{1}{360} \operatorname{tr} R^2 \operatorname{Tr} F^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{8.50}$$

のように 4–形式と 8–形式の積の形に表すことができる．これに対応する 11–形式を $dI_{11}^0 = I_{12}$ から求めると，

$$I_{11}^0 = \left(\omega_{3L}^0 - \frac{1}{30} \omega_{3Y}^0 \right) X_8 \tag{8.51}$$

と選ぶことができる．ここで，

$$\begin{aligned} \omega_{3L}^0 &= \operatorname{tr} \left(\omega \, d\omega + \frac{2}{3} \omega^3 \right), \\ \omega_{3Y}^0 &= \operatorname{Tr} \left(A \, dA + \frac{2}{3} A^3 \right) \end{aligned} \tag{8.52}$$

---

*12）M.B. Green and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B149** (1984) 117.

であり，それぞれ，Lorentz Chern–Simons 形式と Yang–Mills Chern–Simons 形式とよばれる．したがって，$\delta I_{11}^0 = dI_{10}^1$ からアノマリーは，

$$I_{10}^1 = \left(\omega_{2L}^1 - \frac{1}{30}\,\omega_{2Y}^1\right) X_8,$$
$$\omega_{2L}^1 = \mathrm{tr}\,(\lambda\,d\omega), \qquad \omega_{2Y}^1 = \mathrm{Tr}\,(v\,dA) \tag{8.53}$$

となる．

5.5 節で述べたように，反対称テンソル場 $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$ は，群 G のゲージ変換に対して (5.65) のように変換する．この変換を微分形式で表すと，

$$\delta_g\,B = -\frac{1}{30}\,\omega_{2Y}^1 \tag{8.54}$$

となる．係数 $\frac{1}{30}$ が現れたのは，ゲージ群の表現行列の規格化の違いのためである．この変換性は，(5.63) の場の強さ

$$F_3 = \frac{1}{3!}\,F_{\mu\nu\rho}\,dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = d\,B + \frac{1}{30}\,\omega_{3Y}^0 \tag{8.55}$$

がゲージ不変であるために必要であった．したがって，局所項

$$\Delta\mathcal{L} = B\,X_8 \tag{8.56}$$

をラグランジアンに付け加えることによって，アノマリー (8.53) の ω_{2Y}^1 に比例した項を相殺することができる．残りの ω_{2L}^1 に比例した項を相殺するためには，反対称テンソル場 B が局所 Lorentz 変換に対しても同様な変換をする必要があるが，5.5 節の超重力理論ではそのような変換はしなかった．しかし，弦理論の低エネルギー有効理論として見た場合，弦理論的効果によって，場の強さに

$$F_3 = d\,B - \omega_{3L}^0 + \frac{1}{30}\,\omega_{3Y}^0 \tag{8.57}$$

のように **Lorentz Chern–Simons 項** ω_{3L}^0 が付け加わると考えられる．この項は，微分について高次の項であり，低エネルギー領域では通常は無視することができる．局所項 (8.56) も弦理論的効果から得られた高次の項と考えることができる．この形の F_3 がゲージ変換と局所 Lorentz 変換に対して不変であるためには，B は

$$\delta_L\,B = \omega_{2L}^1 \tag{8.58}$$

のように，局所 Lorentz 変換に対しても変換しなければならない．これにより，局所項 (8.56) の変換は，アノマリー (8.53) を完全に相殺する．

このように，弦理論的な補正項を付け加えた $\mathcal{N} = (1,0)$ 理論では，重力アノマリーやゲージアノマリーは相殺している．このような反対称テンソル場のゲージ変換によるアノマリーの相殺を **Green–Schwarz 機構**という．アノマリーの相殺は，直接弦理論を使った計算でも示されている．上の議論は，それ

を低エネルギー有効理論である超重力理論で確かめたことになる．

弦理論的な補正項を加える前の超重力理論のもっていた局所超対称性は，上に述べた補正項を付け加えただけでは破れている．超対称性を回復するためには，他の補正項も付け加える必要がある*13) また，局所超対称性に対するアノマリーが存在することにも注意する必要がある．2 つの局所超変換の交換関係 (5.68) の右辺には，一般座標変換や局所 Lorentz 変換などの局所変換が現れる．したがって，局所超変換のアノマリー $G_Q[\epsilon] = \delta_Q(\epsilon)W$ に対する Wess–Zumino 条件は，

$$\delta_Q(\epsilon_1)\, G_Q[\epsilon_2] - \delta_Q(\epsilon_2)\, G_Q[\epsilon_1] = G_G[\xi] + G_L[\lambda] + \cdots \tag{8.59}$$

となる．このことから，交換関係の右辺に現れる局所変換の対称性にアノマリーがあれば，局所超対称性にもアノマリーがあることになる．実際，2 次元の局所超対称性をもつ理論では，重力アノマリーが存在する場合，局所超対称性にもアノマリーがあることが具体的に確かめられている*14)．弦理論で局所超対称性のアノマリーも相殺しているとすれば，超重力理論にはそれに対する（局所超変換に対して不変ではない）相殺項も付け加わるはずである．したがって，弦理論的補正項を付け加えた超重力理論では，局所超対称性は，量子論的な効果も含めて初めて実現されていると考えられる．

*13) L.J. Romans and N.P. Warner, *Nucl. Phys.* **B273** (1986) 320; S.K. Han, J.K. Kim, I.G. Koh and Y. Tanii, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 553.

*14) Y. Tanii, *Nucl. Phys.* **B259** (1985) 677; P.S. Howe and P.C. West, *Phys. Lett.* **B156** (1985) 335.

第 9 章
ゲージ化された超重力理論

この章では，ベクトル場のミニマル結合をもつゲージ化された超重力理論と，それによく似た構造をもつ有質量超重力理論について述べる．具体例として，4 次元の $\mathcal{N}=8$ 超重力理論のゲージ化を取り上げる．また，高次元の超重力理論のゲージ化の際に問題となる，反対称テンソル場の取り扱いについて議論する．最後に，10 次元の $\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論の 2 種類の変形について述べる．

9.1 ゲージ化された超重力理論と有質量超重力理論

第 2 章や第 5 章で述べた Poincaré 超重力理論では，ベクトル場は他の場とミニマル結合をしていなかった．これは，理論に含まれている場がゲージ対称性のチャージをもっていないことを意味している．Poincaré 超重力理論を変形することによって，ゲージ場が他の場とミニマル結合をした理論を構成できる場合がある．その場合，ゲージ結合定数 g が新しいパラメータとして理論に導入される．このようにしてできた理論を，**ゲージ化された超重力理論**（gauged supergravity）とよぶ．2.7 節で述べた $D=4, \mathcal{N}=2$ AdS 超重力理論は，ゲージ化された超重力理論の例である．Poincaré 超重力理論のゲージ群はアーベル群（$U(1)$ の直積）であるが，ゲージ化された超重力理論のゲージ群は一般には非アーベル群になる．

ゲージ化された超重力理論のもう一つの特徴は，g に比例したフェルミオン場とスカラー場の相互作用項（Yukawa 結合）と，g^2 に比例したスカラー場のポテンシャル項をもつことである．(スカラー場を含まない理論では，これらの代わりに，フェルミオン場の質量項と宇宙項をもつ.）スカラー場のポテンシャルは，背景場に対してゼロでない値をもてば，宇宙項の役割をする．また，Yukawa 結合はフェルミオン場の質量項の役割をする．

ゲージ場を含まない理論でも宇宙項やスカラー場のポテンシャル項を含む理論が存在する．2.4 節で述べた $D=4, \mathcal{N}=1$ AdS 超重力理論はその例である．

そのような理論は，一般に，**有質量超重力理論**（massive supergravity）とよばれる．

ゲージ化された超重力理論や有質量超重力理論は，宇宙項やスカラー場のポテンシャル項をもつため，場の方程式が反 de Sitter 時空を解にもつ場合がある．そのような超重力理論は **AdS 超重力理論**ともよばれる．

9.2 ゲージ化された $D=4, \mathcal{N}=8$ 超重力理論

スカラー場を含むゲージ化された超重力理論の例として，4.3 節で議論した $D=4, \mathcal{N}=8$ 超重力理論のゲージ化*1) を考えよう．ゲージ化される前の理論は，大局的 $E_{7(+7)}$ 対称性をもっていたが，その部分群の $SO(8)$ をゲージ化する．$E_{7(+7)}$ は場の方程式の不変性であり，その変換に対してラグランジアンは不変ではなかった．しかし，その $SO(8)$ 部分群に対しては，ラグランジアンも不変になっている．

ゲージ化された理論を構成するには，まず，$SO(8)$ 変換で変換する場の微分を，局所 $SO(8)$ 変換に対して共変的に変換するように変更する．$SO(8) \in E_{7(+7)}$ で変換する場は，ベクトル場とスカラー場である．ベクトル場の微分は，場の強さ ${F_{\mu\nu}}^{IJ}$ を通して現れ，それを $SO(8)$ Yang–Mills 場の場合の形

$$
{F_{\mu\nu}}^{IJ} = 2\,\partial_{[\mu} {A_{\nu]}}^{IJ} + 2\,g\,{A_{[\mu}}^{IK}\,{A_{\nu]}}^{KJ} \tag{9.1}
$$

に変更すればよい．スカラー場の微分は (4.95) の $P_{\mu ijkl}$ と ${Q_\mu}^i{}_j$ を通して現れるが，(4.95) の右辺の微分を，

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\, u^{IJ}{}_{ij} \;&\to\; \partial_\mu\, u^{IJ}{}_{ij} + 2\,g\,{A_\mu}^{K[I}\,u^{J]K}{}_{ij}, \\
\partial_\mu\, v_{IJij} \;&\to\; \partial_\mu\, v_{IJij} + 2\,g\,{A_\mu}^{K[I}\,v_{J]Kij}
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

のようにベクトル場とミニマル結合した形に置き換えればよい．このように新しく定義された $P_{\mu ijkl}$ と ${Q_\mu}^i{}_j$ は，局所 $SO(8)$ 変換に対して共変的に変換する．また，局所 $SU(8)$ 変換に対しては，以前と同じ形の変換をする．フェルミオン場は，ゲージ化する前の理論では $E_{7(+7)}$ に対して変換しなかったので，その部分群である $SO(8)$ に対しても変換せず，ベクトル場との直接のミニマル結合はない．ただし，フェルミオン場に対する共変微分は，(4.100) のように，$SU(8)$ ゲージ場 ${Q_\mu}^i{}_j$ を含んでいて，それが ${A_\mu}^{IJ}$ に依存しているため，ミニマル結合に似た形のフェルミオン場とベクトル場の結合があることになる．

ゲージ化された理論の最終的なラグランジアンと局所超変換は，

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g, \qquad \delta_Q = \delta_{Q0} + \delta_{Qg} \tag{9.3}
$$

のように 2 つの部分の和として書ける．$\mathcal{L}_0$ と δ_{Q0} は，ゲージ化する前のラグラ

*1） B. de Wit and H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B208** (1982) 323.

ンジアン (4.99) と局所超変換 (4.106) で，その中のベクトル場の場の強さやスカラー場の微分を，上のように $SO(8)$ 共変的なものに置き換えたものである．この置き換えをしただけでは，ゲージ化する前の理論のもっていた局所超対称性は壊れてしまう．局所超対称性を回復するには，(9.3) のように，新しい形の項 $\mathcal{L}_g$, δ_{Qg} をラグランジアンと局所超変換に付け加える必要がある．これらの追加項をうまく選ぶと，局所超対称性をもつ理論を構成することができる．

ラグランジアンに付け加えるべき項は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= 4\,g^2\,e\left(\frac{3}{4}\,|A_1{}^{ij}|^2 - \frac{1}{24}\,|A_2{}^{i}{}_{jkl}|^2\right) + g\,e\biggl(A_1{}^{ij}\,\bar{\psi}_{\mu i}\,\gamma^{\mu\nu}\,\psi_{\nu j} \\ &\qquad + \frac{1}{3\sqrt{2}}\,A_2{}^{i}{}_{jkl}\,\bar{\psi}_{\mu i}\,\gamma^{\mu}\,\lambda^{jkl} + A_3{}^{ijk,lmn}\,\bar{\lambda}_{ijk}\,\lambda_{lmn} + \text{c.c.}\biggr) \end{aligned} \tag{9.4}$$

という形をしている．ここで，A_1, A_2, A_3 は，スカラー場のある関数である．これらの項は，スカラー場のポテンシャル項，および，フェルミオン場とスカラー場の Yukawa 結合を表している．局所超対称性をもつためには，スカラー場の関数を

$$\begin{aligned} &A_1{}^{ij} = -\frac{1}{42}\,T_k{}^{ikj}, \qquad A_2{}^{i}{}_{jkl} = -\frac{1}{6}\,T^{i}{}_{[jkl]}, \\ &A_3{}^{ijk,lmn} = \frac{1}{432}\,\eta\,\epsilon^{ijkpqr[lm}\,T^{n]}{}_{pqr} \end{aligned} \tag{9.5}$$

と選べばよい．ここで，スカラー場からつくられた $\boldsymbol{T}$ **テンソル**とよばれる量

$$\begin{aligned} &T_i{}^{jkl} = \left(u_{IJ}{}^{kl} + v^{IJkl}\right)\left(u^{JK}{}_{im}\,u_{KI}{}^{jm} - v_{JKim}\,v^{KIjm}\right), \\ &T^{i}{}_{jkl} = \left(T_i{}^{jkl}\right)^* \end{aligned} \tag{9.6}$$

を導入した．局所超変換に付け加えるべき項は，(9.5) の A_1, A_2 を使って，

$$\begin{aligned} &\delta_{Qg}\,\psi_\mu{}^{i} = g\,A_1{}^{ij}\,\gamma_\mu\,\epsilon_j, \\ &\delta_{Qg}\,\lambda^{ijk} = -\sqrt{2}\,g\,\left(A_2{}^{l}{}_{ijk}\right)^*\,\epsilon^{l} \end{aligned} \tag{9.7}$$

となる．このように $\mathcal{L}_g$ と δ_{Qg} を選ぶと，ラグランジアンからつくった作用は局所超変換に対して不変になる．不変性を示すには，スカラー場 u, v が $E_{7(+7)}$ の行列成分であることから導かれる T テンソルに関するいろいろな公式を使う必要がある*2)．

ゲージ化された理論の局所対称性は，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，局所 $SO(8)$ ゲージ変換，局所 $SU(8)$ 変換，および，局所超変換に対する対称性である．ゲージ化する前にあった大局的 $E_{7(+7)}$ 対称性は，その部分群 $SO(8)$ だけをゲージ化したため，壊れている．2 つの局所超変換の交換関係は，ゲージ化する前の (4.108) と同じ形になる．ただし，今の場合の δ_g は，$SO(8)$ ゲージ変換を表している．また，右辺に現れる変換のパラメータも変更を受け，(4.109) の $F_{\mu\nu}{}^{IJ}$ や $Q_\mu{}^{i}{}_{j}$ は，$SO(8)$ 共変なものになっている．さらに，局所 Lorentz

*2) くわしくは，脚注 *1) の論文を参照せよ．

変換と局所 $SU(8)$ 変換のパラメータに

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_{ab} &= -\frac{1}{2}\,g\,A_1{}^{ij}\,\bar{\epsilon}_{2i}\,\gamma_{ab}\,\epsilon_{1j} + \text{c.c}, \\ \Delta\Lambda^i{}_j &= -\frac{1}{6}\,g\left(T^i{}_{jkl}\,\bar{\epsilon}_2^k\,\epsilon_1^l + T_j{}^{ikl}\,\bar{\epsilon}_{2k}\,\epsilon_{1l}\right)\end{aligned} \tag{9.8}$$

が付け加わる．

場の方程式の解

ゲージ化された理論の場の方程式の解を求めよう．ベクトル場とフェルミオン場がゼロであり，スカラー場が座標によらない定数であるような解を考える．スカラー場の値は，ポテンシャルの停留点の位置に決まる．1 つの停留点は，スカラー場の行列 V が単位行列になる場合，つまり，

$$u^{IJ}{}_{ij} = 2\,\delta_i^{[I}\,\delta_j^{J]}, \qquad v_{IJij} = 0 \tag{9.9}$$

となる場合である．(この点がポテンシャルの停留点であることは，後でこの点のまわりのゆらぎを調べるときに確かめる.）このとき重力場の方程式は,

$$R_{\mu\nu} = -12\,g^2\,g_{\mu\nu} \tag{9.10}$$

となる．この方程式の 1 つの解は，半径の逆数が $a = 2g$ の**反 de Sitter 時空**である（付録 D 参照）．その場合を考えよう．

4 次元の反 de Sitter 時空は，アイソメトリとして $SO(2,3)$ 対称性をもつ．重力場以外の場はゼロか定数であり，$SO(2,3)$ 変換に対して不変である．したがって，この超重力理論の解全体が，$SO(2,3)$ 対称性をもっている．また，この解は，局所的 $SO(8)\times SU(8)$ 変換のうち，大局的な対角的 $SO(8)$ の変換（$SO(8)$ 変換と，$SU(8)$ の部分群の $SO(8)$ 変換を同時に行う変換）に対しても不変である．

さらに，この解は，大局的超対称性ももっていることが次のようにわかる．解が超対称性をもっていることを示すには，解に対して超変換 (9.3) を行って，それがゼロになっていることを確かめればよい．フェルミオン場はゼロなので，ボソン場の超変換は自動的にゼロになっている．フェルミオン場の超変換は，解に対して $A_1^{ij} = -\delta^{ij}$, $A_2{}^i{}_{jkl} = 0$ であることを使うと,

$$\delta_Q\,\psi_\mu{}^i = D_\mu\,\epsilon^i - g\,\gamma_\mu\,\epsilon_i, \qquad \delta_Q\,\lambda^{ijk} = 0 \tag{9.11}$$

となる．λ^{ijk} は自動的に不変になっている．$\psi_\mu{}^i$ が不変であるためには，上の $\delta_Q\psi_\mu{}^i$ の右辺がゼロになっている必要がある．これは，変換のパラメータ ϵ^i に対する **Killing スピノール方程式** $D_\mu\epsilon^i = g\gamma_\mu\epsilon_i$ を要求する．この方程式の荷電共役は，$D_\mu\epsilon_i = g\gamma_\mu\epsilon^i$ である．この Killing スピノール方程式の積分可能条件は，次のように求められる．まず，Killing スピノール方程式を使って共変微分の交換子を計算すると,

$$[D_\mu,\, D_\nu]\,\epsilon^i = D_\mu(g\,\gamma_\nu\,\epsilon_i) - (\mu \leftrightarrow \nu) = -2\,g^2\,\gamma_{\mu\nu}\,\epsilon^i \tag{9.12}$$

となる．この式と一般的に成り立つ (1.42) から，積分可能条件

$$\left(\frac{1}{4}\,R_{\mu\nu}{}^{ab}\,\gamma_{ab} + 2\,g^2\,\gamma_{\mu\nu}\right)\epsilon^i = 0 \tag{9.13}$$

が得られる．この条件は，半径 $a = 2g$ の反 de Sitter 時空に対して確かに成り立っていることがわかる．このように，この解は大局的 $SO(2,3) \times SO(8)$ 対称性と大局的 $\mathcal{N} = 8$ 超対称性をもっている．これらの対称性変換は閉じた交換関係をもち，超代数 $\boldsymbol{OSp(8|4)}$ をなしている（3.5 節参照）．

次に，この解のまわりの微小なゆらぎを考えよう．スカラー場のゆらぎを考えるためには，局所 $SU(8)$ 対称性のゲージを固定すると便利である．ゲージ固定条件として，

$$\begin{aligned} V(x) &= \exp\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{ijkl})^*(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{ijkl}(x) & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_{ijkl} &= \frac{1}{4!}\,\eta\,\epsilon_{ijklmnpq}(\phi_{mnpq})^* \end{aligned} \tag{9.14}$$

を使うことにする．指数は，$E_{7(+7)}$ の Lie 代数の表現行列 (4.87) で，$SU(8)$ の自由度を表す Λ をゼロとおいたものである．複素場 ϕ がスカラー場のゆらぎを表している．このゲージでは，(4.90) の u, v は，

$$\begin{aligned} u^{ij}{}_{kl} &= 2\,\delta_k^{[i}\,\delta_l^{j]} + \frac{1}{8}\,\phi^{ijmn}\,\phi_{mnkl} + \mathcal{O}(\phi^4), \\ v_{ijkl} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_{ijkl} + \mathcal{O}(\phi^3) \end{aligned} \tag{9.15}$$

となる．これを使い，スカラー場の微小なゆらぎに対するラグランジアンを求めると，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{48}\,e\,\partial_\mu\phi_{ijkl}\,\partial^\mu\phi^{ijkl} + \frac{1}{6}\,g^2\,e\,\phi_{ijkl}\,\phi^{ijkl} + \mathcal{O}(\phi^3) \tag{9.16}$$

が得られる．ポテンシャル項に ϕ について 1 次の項がないので，解 (9.9) が確かにポテンシャルの停留点であることがわかる．ただし，ϕ^2 の項の係数の符号からわかるように，これはポテンシャルの極小点ではなく，極大点である．このことに対応して，ゆらぎの質量の 2 乗は，

$$m_\phi^2 = -2\,a^2 \tag{9.17}$$

のように負になっている．（g の代わりに，反 de Sitter 時空の半径の逆数 $a = 2g$ を使った．）これは，時空が Minkowski 時空だったら，この解が不安定であることを表している．しかし，付録 D で述べるように，反 de Sitter 時空では，質量の 2 乗が負であっても，それがある値以上ならば安定であることが示せる．D 次元の反 de Sitter 時空で，スカラー場が安定であるために必要な質量に対する条件は，(D.12) である．今の $D = 4$ の場合，この条件は $m^2 \geq -\frac{9}{4}a^2$ で

あり，上の ϕ の質量はこの条件を満たしていて，安定であることがわかる．

コンパクト化との関係

ゲージ化されていない $D=4, \mathcal{N}=8$ 超重力理論は，7.1.7 節でみたように，11 次元の超重力理論から次元還元によって求めることができる．これは，11 次元の理論を 7 次元トーラスを使って 4 次元にコンパクト化し，Kaluza–Klein モードを消し，ゼロ質量の場だけを残したことに相当する．ゲージ化された $D=4, \mathcal{N}=8$ 超重力理論も，11 次元の理論のコンパクト化と関係している．この場合は，7 次元球面 S^7 を使って 4 次元にコンパクト化し，4 次元重力場と同じ超多重項に含まれる場だけを残し，それ以外の Kaluza–Klein モードを消すことによって得られる*3)．11 次元の超重力理論は，場の方程式の解として，$AdS_4 \times S^7$ をもつが，それは上で議論した 4 次元の超重力理論の反 de Sitter 時空解に対応している．

他のゲージ群

上ではゲージ化する前の大局的な対称性 $E_{7(+7)}$ の部分群のうち，$SO(8)$ をゲージ化した理論を考えた．同様に，$E_{7(+7)}$ の他の部分群をゲージ化することも可能である．理論に含まれるベクトル場は 28 個なので，ゲージ化可能な部分群の次元は 28 以下である．実際，$E_{7(+7)}$ の部分群である $SO(p,q)$ $(p+q=8)$ や，それを Inönü–Wigner 縮約して得られる非半単純群をゲージ化した理論が構成されている*4)．これらの理論は，非コンパクト群をゲージ群とする Yang–Mills 場を含むが，非線形シグマ模型で表されるスカラー場を含むため，運動項が通常と逆符号になっているようなゴースト場は現れない．

一般に，超重力理論の大局的対称性 G の部分群をゲージ化する際に，その部分群の選び方は必ずしも一意的ではない．各超重力理論に対して，どの部分群がゲージ化可能かを系統的に調べる方法が知られている*5)．

9.3 高次元のゲージ化された超重力理論

高次元の超重力理論についても，理論に含まれているベクトル場を使って，表 4.1 の大局的な対称性 G の部分群のゲージ化を考えることができる．ただし，**反対称テンソル場**が含まれている場合には，その取り扱いに注意する必要がある．この点に注目して，高次元のゲージ化された理論の 2 つの例をみよう．

9.3.1 ゲージ化された $D=7, \mathcal{N}=4$ 超重力理論

ゲージ化されていない理論は，表 3.3 のように，重力場以外のボソン場とし

*3) 参考文献 [21]; B. de Wit and H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B281** (1987) 211.
*4) C.M. Hull, *Phys. Lett.* **B142** (1984) 39; *Phys. Lett.* **B148** (1984) 297.
*5) H. Samtleben, *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 214002.

て，10 個のベクトル場，5 個の 2 階反対称テンソル場，14 個のスカラー場を含む．ラグランジアンは，大局的な非コンパクト対称性 $SL(5,\mathbb{R})$ と局所的な $SO(5)$ 対称性をもち，スカラー場は $SL(5,\mathbb{R})/SO(5)$ 非線形シグマ模型で表される．$SL(5,\mathbb{R})$ に対して，ベクトル場 ${A_\mu}^{IJ} = -{A_\mu}^{JI}$ と反対称テンソル場 $B^I_{\mu\nu}$ $(I,J=1,\cdots,5)$ は，それぞれ，**10** 表現と **5** 表現によって変換する．

この 10 個のベクトル場を使って，$SL(5,\mathbb{R})$ の部分群 $SO(5)$ をゲージ化することが考えられる．しかし，これには困難な点がある．ベクトル場の $SO(5)$ ゲージ対称性と反対称テンソル場のゲージ対称性を両立できないことである．反対称テンソル場は $SO(5) \in SL(5,\mathbb{R})$ に対して非自明な変換をするので，$SO(5)$ ゲージ変換に対して共変的な場の強さを定義するには，

$$F^I_{\mu\nu\rho} = 3\,D_{[\mu}B^I_{\nu\rho]} \equiv 3\left(\partial_{[\mu}B^I_{\nu\rho]} + g\,A^{IJ}_{[\mu}\,B^J_{\nu\rho]}\right) \tag{9.18}$$

のように，$SO(5)$ 共変微分を使う必要がある．しかし，このように定義された場の強さは，反対称テンソル場のゲージ変換

$$\delta_g\,B^I_{\mu\nu} = 2\,D_{[\mu}\,\zeta^I_{\nu]} \tag{9.19}$$

に対して不変ではなく，

$$\delta_g\,F^I_{\mu\nu\rho} = 3\,F^{IJ}_{[\mu\nu}\,\zeta^J_{\rho]} \tag{9.20}$$

のように変換する．したがって，反対称テンソル場の運動項はこの変換に対して不変ではなくなってしまう．ゲージ不変性がないと，反対称テンソル場は余分な自由度をもつことになり，超対称性理論で要求されるボソンの自由度とフェルミオンの自由度が等しいことが成り立たない．

この問題は次のように解決された*6)．まず，ゲージ化されていない理論は，2 階反対称テンソル場 $B^I_{\mu\nu}$ の代わりに，3 階反対称テンソル場 $B^I_{\mu\nu\rho}$ を使っても定式化できることに注意する．1.6.1 節で述べたように，通常の Maxwell 型のラグランジアンをもつ 2 階反対称テンソル場は，それに双対な 3 階反対称テンソル場と等価である．上の問題を解決するためには，3 階反対称テンソル場を使い，さらに，その場に対するラグランジアンを，Maxwell 型ではなく，1.6.3 節で述べた **Chern–Simons** 型にとればよい．7 次元では，Chern–Simons 型の作用は 3 階反対称テンソル場に対してだけ可能である．7 次元の 3 階の（一般に，$4k-1$ 次元の $2k-1$ 階の）反対称テンソル場については，ゼロ質量の Maxwell 型理論と質量をもった Chern–Simons 型理論は同じ自由度をもつ．したがって，ボソンとフェルミオンの自由度は，等しいままである．また，質量をもった Chern–Simons 理論はもともと反対称テンソル場のゲージ不変性をもっていないので，微分を $SO(8)$ 共変微分に置き換える際に，それについて心配す

*6) M. Pernici, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **B143** (1984) 103.

る必要はない．

このようにして，ゲージ化された $D=7, \mathcal{N}=4$ 超重力理論が構成された．ラグランジアンの中の 3 階反対称テンソル場について 2 次の項は，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{72}m\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau\lambda\kappa}\,B^I_{\mu\nu\rho}\,D_\sigma B^I_{\tau\lambda\kappa}-\frac{1}{12}m^2\,e\,V_i{}^I\,V_i{}^J\,B^I_{\mu\nu\rho}\,B^{J\mu\nu\rho} \quad (9.21)$$

のように $SO(8)$ 共変微分 D_ρ を使った Chern–Simons 型になっている．ここで，$V_i{}^I$ は，$SL(5,\mathbb{R})$ に値をもつスカラー場 $V_I{}^i$ の逆行列である．また，質量パラメータ m は，ゲージ結合定数 g によって $m=\frac{1}{\sqrt{2}}g$ と与えられる．

このようにゲージ化された理論に Chern–Simons 型の 3 階反対称テンソル場が含まれていることは，高次元の理論のコンパクト化からも示唆されていた．$D=11, \mathcal{N}=1$ 超重力理論は，$AdS_7\times S^4$ を解にもち，S^4 を使ってこの理論をコンパクト化すると，ゲージ化された $D=7, \mathcal{N}=4$ 理論が得られると予想される*7)．ゲージ群は，S^4 の対称性である $SO(5)$ になるはずである．このコンパクト化で，$AdS_7\times S^4$ のまわりの場の微小なゆらぎのスペクトルを調べてみると，質量をもつ Chern-Simons 型の場の方程式を満たす 3 階反対称テンソル場が含まれていることがわかった．

9.3.2 ゲージ化された $D=5$, $\mathcal{N}=8$ 超重力理論

ゲージ化されていない $D=5, \mathcal{N}=8$ 超重力理論は，表 3.3 のように，重力場以外のボソン場として，27 個のベクトル場と 42 個のスカラー場を含む．ラグランジアンは，大局的な非コンパクト対称性 $E_{6(+6)}$ と局所的な $USp(8)$ 対称性をもち，スカラー場は $E_{6(+6)}/USp(8)$ 非線形シグマ模型で表される．ベクトル場は，$E_{6(+6)}$ に対して，**27** 表現（基本表現）によって変換する．この 27 個のベクトル場を使って，$E_{6(+6)}$ の部分群をゲージ化しようとするとき，27 次元の半単純部分群は存在しないので，どの部分群をゲージ化すべきか明らかではない．

この場合もゲージ化された理論を構成するためのヒントは，高次元の理論のコンパクト化から得られた．$D=10, \mathcal{N}=(2,0)$ 理論は，$AdS_5\times S^5$ を解にもち，S^5 を使って 5 次元にコンパクト化すると，ゲージ化された $D=5, \mathcal{N}=8$ 理論が得られると予想される．$AdS_5\times S^5$ のまわりの場の微小なゆらぎのスペクトルを調べると，15 個のベクトル場と 12 個の 2 階反対称テンソル場が含まれていることがわかった．2 階反対称テンソル場は，質量をもった Chern–Simons 型の場の方程式を満たしている．S^5 のアイソメトリは $SO(6)$ であり，15 個のベクトル場は $SO(6)$ ゲージ場と解釈できる．また，2 階反対称テンソル場は，ゼロ質量の Maxwell 型の 2 階反対称テンソル場と同じ自由度をもち，さらにそれは，双対なゼロ質量ベクトル場と同じ自由度をもつ．

*7) このことは，H. Nastase, D. Vaman and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **B469** (1999) 96 で確かめられた．

このことから，ゲージ化された理論を構成するには，ゲージ化する前の理論の 27 個のベクトル場のうち 12 個を双対な 2 階反対称テンソル場で表し，それを質量をもった Chern–Simons 型の理論に置き換えればよいことが示唆される．残りの 15 個のベクトル場は，$E_{6(+6)}$ の $SO(6)$ 部分群をゲージ化するためのゲージ場となる．実際そのようにして，ゲージ化された理論が構成された*8)．この場合，ゲージ化される $SO(6)$ は，$SL(6,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})\in E_{6(+6)}$ の $SL(6,\mathbb{R})$ の部分群であるため，ゲージ化したあとも大局的 $SL(2,\mathbb{R})$ 対称性が残っている．

9.4 $D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論の変形

$D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論には，パラメータを含んだ 2 種類の変形が知られている．一つはゲージ場のミニマル結合をもたない**有質量超重力理論**であり，もう一つはミニマル結合をもつ**ゲージ化された超重力理論**である．この 2 つの理論を順番に見ていこう．

9.4.1 $D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 有質量超重力理論

5.3 節で述べた $D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論に 1 個のパラメータ m を導入して，ラグランジアンがスカラー場のポテンシャル項やフェルミオン場とスカラー場の Yukawa 結合項を含む理論を構成することができる*9)．この理論は，ベクトル場のミニマル結合はもたないが，それ以外の点ではゲージ化された超重力理論によく似た理論である．この理論を，$D=10, \mathcal{N}=(1,1)$ 有質量超重力理論とよぶ．これに対して，5.3 節の理論をゼロ質量理論とよぶことにする．

有質量理論に含まれている場は，ゼロ質量理論と同じく，重力場 ${e_\mu}^a(x)$, 実反対称テンソル場 $B_{\mu\nu\rho}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$, 実ベクトル場 $B_\mu(x)$, 実スカラー場 $\phi(x)$, Majorana Rarita–Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$, Majorana スピノール場 $\lambda(x)$ である．ラグランジアンと局所超変換は，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_m, \qquad \delta_Q=\delta_{Q0}+\delta_{Qm} \tag{9.22}$$

のように 2 つの部分の和として書ける．$\mathcal{L}_0$ と δ_{Q0} は，ゼロ質量理論の式で，ベクトル場と 3 階反対称テンソル場の場の強さを，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}&=2\,\partial_{[\mu}B_{\nu]}+m\,B_{\mu\nu}, \\ F_{\mu\nu\rho\sigma}&=4\,\partial_{[\mu}B_{\nu\rho\sigma]}+4\,B_{[\mu}\,F_{\nu\rho\sigma]}+3\,m\,B_{[\mu\nu}\,B_{\rho\sigma]} \end{aligned} \tag{9.23}$$

と置き換えたものである．$\mathcal{L}_m$ は，フェルミオン場とスカラー場の Yukawa 結合項，スカラー場のポテンシャル項，Chern–Simons 項への補正項からなり，

*8) M. Pernici, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B259** (1985) 460; M. Günaydin, L.J. Romans and N.P. Warner, *Phys. Lett.* **B154** (1985) 268.
*9) L.J. Romans, *Phys. Lett.* **B169** (1986) 374.

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{8} m\, e\, e^{\frac{5}{4}\phi}\, \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu - \frac{5}{8\sqrt{2}} m\, e\, e^{\frac{5}{4}\phi}\, \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \lambda - \frac{21}{32} m\, e\, e^{\frac{5}{4}\phi}\, \bar{\lambda} \lambda$$
$$- \frac{1}{2} m^2\, e\, e^{\frac{5}{2}\phi} - \frac{1}{288} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{10}} \Big(m\, \partial_{\mu_1} B_{\mu_2\mu_3\mu_4} B_{\mu_5\mu_6} B_{\mu_7\mu_8} B_{\mu_9\mu_{10}}$$
$$+ \frac{9}{40} m^2 B_{\mu_1\mu_2} B_{\mu_3\mu_4} B_{\mu_5\mu_6} B_{\mu_7\mu_8} B_{\mu_9\mu_{10}} \Big) \tag{9.24}$$

である．δ_{Qm} は，フェルミオン場に対してだけ寄与があり，

$$\delta_{Qm} \psi_\mu = \frac{1}{32} m\, e^{\frac{5}{4}\phi} \gamma_\mu \epsilon, \qquad \delta_{Qm} \lambda = \frac{5}{8\sqrt{2}} m\, e^{\frac{5}{4}\phi} \epsilon \tag{9.25}$$

で与えられる．ラグランジアンには，ベクトル場 B_μ とのミニマル結合はなく，したがってゲージ化された理論ではない．しかし，それ以外の点では，9.2 節で述べたゲージ化された $D=4, \mathcal{N}=8$ 超重力理論とよく似ていることがわかる．

このラグランジアンからつくった作用は，ゼロ質量理論と同様に，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ベクトル場と反対称テンソル場のゲージ変換，および，局所超変換に対して不変である．ゼロ質量理論のゲージ変換 (5.10) は，

$$\begin{aligned} \delta_g B_\mu &= \partial_\mu \zeta - m\, \zeta_\mu, \\ \delta_g B_{\mu\nu} &= 2\, \partial_{[\mu} \zeta_{\nu]}, \\ \delta_g B_{\mu\nu\rho} &= 3\, \partial_{[\mu} \zeta_{\nu\rho]} + 3\, B_{[\mu\nu} \partial_{\rho]} \zeta - 3\, m\, B_{[\mu\nu} \zeta_{\rho]} \end{aligned} \tag{9.26}$$

のように変更される．場の強さ (9.23)，および，変更を受けない (5.9) の $F_{\mu\nu\rho}$ は，これらのゲージ変換に対して不変である．局所超変換の交換関係は，ゼロ質量理論の (5.12) と同じ形になるが，右辺の変換パラメータは変更を受け，ベクトル場と 3 階反対称テンソル場の場の強さが (9.23) に置き換わっている．また，右辺の局所 Lorentz 変換のパラメータには，

$$\varDelta \lambda_{ab} = -\frac{1}{64} m\, e^{\frac{5}{4}\phi}\, \bar{\epsilon}_2 \gamma_{ab} \epsilon_1 \tag{9.27}$$

が付け加わる．ゼロ質量理論のもっていた大局的な $GL(1, \mathbb{R})^+$ 対称性は，変形によって破れている．

ゲージ変換 (9.26) の形をみると，$m \neq 0$ の場合は，ζ_μ をパラメータとする変換によって $B_\mu = 0$ とすることが可能なことがわかる．これは，この変換のゲージを固定したことに当たる．このゲージでは，ベクトル場の運動項は，

$$-\frac{1}{4} e\, e^{\frac{3}{2}\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} m^2\, e\, e^{\frac{3}{2}\phi} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{9.28}$$

となり，背景場として ϕ が定数の値をとるときには，$B_{\mu\nu}$ の質量項を表す．これは，一種の **Higgs 機構**である．通常の Higgs 機構では，ゲージ変換によってスカラー場をゼロにすることができ（ユニタリー・ゲージ），そのスカラー場の運動項からゲージ場の質量項が現れる．これは，ベクトル場がスカラー場を縦波成分として吸収し，質量を得たと解釈できる．今の場合も同様に，反対称テンソル場がベクトル場を縦波成分として吸収し，質量を得ると考えること

ができる.

このゲージでは，ゲージ条件 $B_\mu = 0$ が保たれるように，局所変換に相殺 ζ_μ ゲージ変換を加える必要がある．(9.26) のゲージ変換については，$\zeta_\mu = m^{-1}\partial_\mu\zeta$ となり，これを (9.26) に代入すると，ζ 変換と $\zeta_{\mu\nu}$ の変換は，

$$\delta_g B_{\mu\nu} = 0, \qquad \delta_g B_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{[\mu}\zeta_{\nu\rho]} \tag{9.29}$$

となる．局所超変換については，パラメータ

$$\zeta_\mu = -\frac{1}{4m}\,e^{-\frac{3}{4}\phi}\,\bar\epsilon\bar\gamma\,\psi_\mu - \frac{3}{8\sqrt{2}m}\,e^{-\frac{3}{4}\phi}\,\bar\epsilon\gamma_\mu\,\lambda \tag{9.30}$$

の相殺ゲージ変換を加える必要がある．

この理論はスカラー場の指数関数型ポテンシャルをもつため，10 次元の Minkowski 時空は場の方程式の解になっていない．その代わりに，8 次元的な広がりをもった 8 ブレイン解をもつ．この解は IIA 型超弦理論に含まれる D8 ブレインに対応し，パラメータ m はそれに結合した 9 階の反対称テンソル場の場の強さ $F_{\mu_1\cdots\mu_{10}} = me\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{10}}$ を表していると考えられる*10).

9.4.2 ゲージ化された $D = 10$, $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論

$D = 10, \mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論のもう一つの変形は，ゲージ化された超重力理論*11) である．この理論は，6.3 節で述べた Scherk–Schwarz の一般化された次元還元の方法を使って，11 次元の超重力理論から求めることができる．含まれている場は，5.3 節の変形する前の理論と同じである．

場の方程式

11 次元の超重力理論のラグランジアン (5.1) は，実数パラメータ λ をもつ大局的な変換

$$\hat e_M{}^A \;\to\; \lambda\,\hat e_M{}^A, \quad \hat B_{MNP} \;\to\; \lambda^3\,\hat B_{MNP}, \quad \hat\psi_M \;\to\; \lambda^{\frac{1}{2}}\,\hat\psi_M \tag{9.31}$$

に対して，不変ではないが，$\mathcal{L} \to \lambda^9\mathcal{L}$ のようにスケール倍の形の変換をする．(7.1 節と同様に，11 次元の場は ^ をつけて表す.) したがって，このラグランジアンから導かれる場の方程式は，この変換に対して不変である．この変換を使った Scherk–Schwarz 還元によって，ゲージ化された理論を求めることができる．まず，この変換の形の $x^{10} \equiv y$ 依存性をもつ

$$\begin{aligned}
&\hat e_M{}^A(x,y) = e^{my}\,\hat e_M{}^A(x),\\
&\hat B_{MNP}(x,y) = e^{3my}\,\hat B_{MNP}(x),\\
&\hat\psi_M(x,y) = e^{\frac{1}{2}my}\,\hat\psi_M(x)
\end{aligned} \tag{9.32}$$

*10) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724.

*11) P.S. Howe, N.D. Lambert and P.C. West, *Phys. Lett.* **B416** (1998) 303; I.V. Lavrinenko, H. Lü and C.N. Pope, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 2239; E. Bergshoeff, T. de Wit, U. Gran, R. Linares and D. Roest, *JHEP* **10** (2002) 061.

を仮定する．さらに，右辺の $\hat{e}_M{}^A, \ldots$ を，7.1.1 節と同様に 10 次元の場で表す．これを 11 次元の理論の場の方程式に代入すると，10 次元の理論の場の方程式が得られる．別の方法として，6.3 節で述べたように，(9.32) の右辺の場に y 依存性を残したものを 11 次元のラグランジアンに代入し，それを注意深く変分することによって場の方程式を求めることもできる．

このようにして得られる 10 次元の場の方程式は，

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} &= -36\, m^2 e^{-\frac{3}{2}\phi} g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\tilde{D}_\mu \phi\, \tilde{D}_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{D}_\rho \phi\, \tilde{D}^\rho \phi \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} e^{\frac{1}{2}\phi} \left(F_{\mu\rho\sigma\tau} F_\nu{}^{\rho\sigma\tau} - \frac{1}{8} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma\tau\lambda} F^{\rho\sigma\tau\lambda} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} e^{-\phi} \left(F_{\mu\rho\sigma} F_\nu{}^{\rho\sigma} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma\tau} F^{\rho\sigma\tau} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\phi} \left(F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) + \cdots , \\
D_\sigma (e^{\frac{1}{2}\phi} F^{\mu\nu\rho\sigma}) &= 6\, m\, e^{\frac{1}{2}\phi} F^{\mu\nu\rho\sigma} B_\sigma - 6\, m\, e^{-\phi} F^{\mu\nu\rho} \\
&\quad - \frac{1}{144} e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma_1\cdots\sigma_7} F_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} F_{\sigma_5\sigma_6\sigma_7} + \cdots , \\
D_\rho (e^{-\phi} F^{\mu\nu\rho}) &= 6\, m\, e^{-\phi} F^{\mu\nu\rho} B_\rho + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\phi} F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\
&\quad + \frac{1}{1152} e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho_1\cdots\rho_8} F_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4} F_{\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8} + \cdots , \\
D_\nu \left(e^{\frac{3}{2}\phi} F^{\mu\nu} \right) &= 9\, m\, e^{\frac{3}{2}\phi} F^{\mu\nu} B_\nu - 12\, m\, \tilde{D}^\mu \phi \\
&\quad - \frac{1}{6} e^{\frac{1}{2}\phi} F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho\sigma} + \cdots , \\
D_\mu \tilde{D}^\mu \phi &= 9\, m\, \tilde{D}^\mu \phi\, B_\mu + \frac{1}{96} e^{\frac{1}{2}\phi} F_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&\quad - \frac{1}{12} e^{-\phi} F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} + \frac{3}{8} e^{\frac{3}{2}\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cdots , \\
\gamma^{\mu\nu\rho} \tilde{D}_\nu \psi_\rho &= -\frac{9}{2} m\, e^{-\frac{3}{4}\phi} \gamma^{\mu\nu} \bar{\gamma} \psi_\nu + \frac{51}{4\sqrt{2}} m\, e^{-\frac{3}{4}\phi} \gamma^\mu \bar{\gamma} \lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu \gamma^\mu \lambda\, \tilde{D}_\nu \phi + \cdots , \\
\gamma^\mu \tilde{D}_\mu \lambda &= \frac{3}{4\sqrt{2}} m\, e^{-\frac{3}{4}\phi} \gamma^\mu \bar{\gamma} \psi_\mu - \frac{45}{8} m\, e^{-\frac{3}{4}\phi} \bar{\gamma} \lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\mu \tilde{D}_\nu \phi + \cdots
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

となる．ここで，"$\cdots$" は，フェルミオン場について高次の項を表す．ベクトル場と反対称テンソル場の場の強さは，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= 2\, \partial_{[\mu} B_{\nu]}, \\
F_{\mu\nu\rho} &= 3\, \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} - 3\, m\, B_{\mu\nu\rho}, \\
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\, \partial_{[\mu} B_{\nu\rho\sigma]} + 12\, B_{[\mu}\, \partial_\nu B_{\rho\sigma]} - 12\, m\, B_{[\mu} B_{\nu\rho\sigma]}
\end{aligned}
\tag{9.34}
$$

で与えられる．また，$\tilde{R}_{\mu\nu}$ と $\tilde{R}$ は，変形されたスピン接続

$$\tilde{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + \frac{9}{8}\, m\, (B_a\, e_{\mu b} - B_b\, e_{\mu a}) \tag{9.35}$$

からつくった Ricci テンソルとスカラー曲率である．$\tilde{R}_{\mu\nu}$ は $\mu\nu$ について対称ではないが，上の方程式にはその対称部分 $\tilde{R}_{(\mu\nu)}$ が現れている．さらに，微分 $\tilde{D}_\mu$ は，このスピン接続を使って，

$$\begin{aligned} &\tilde{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \frac{3}{2}\, m\, B_\mu, \\ &\tilde{D}_{[\mu} \psi_{\nu]} = \left(\partial_{[\mu} + \frac{1}{4}\, \tilde{\omega}_{[\mu}{}^{ab}\, \gamma_{ab} - \frac{9}{16}\, m\, B_{[\mu} \right) \psi_{\nu]}, \\ &\tilde{D}_\mu \lambda = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\, \tilde{\omega}_\mu{}^{ab}\, \gamma_{ab} + \frac{9}{16}\, m\, B_\mu \right) \lambda \end{aligned} \tag{9.36}$$

と定義されている．場の方程式 (9.33) で $m = 0$ とすれば，ゲージ化する前のラグランジアン (5.8) から導かれた場の方程式になる．$m \neq 0$ の場合は，6.3 節で議論したように，この場の方程式を変分によって導く 10 次元のラグランジアンは存在しない．

局所対称性

ゲージ化された理論には，元の理論と同じように，一般座標変換，局所 Lorentz 変換，ベクトル場と反対称テンソル場のゲージ変換，局所超変換に対する不変性がある．ただし，変換の形は元の理論と必ずしも同じではない．

ボソン的な局所変換は，11 次元の理論の局所変換の式に (9.32) を代入することによって得られる．11 次元の一般座標変換と局所 Lorentz 変換からは，10 次元の一般座標変換，局所 Lorentz 変換，および，ベクトル場 $B_\mu(x)$ のゲージ変換が得られる．6.2.1 節で述べたように，11 次元の一般座標変換のパラメータのうち，$\xi^y(x) \equiv \zeta(x)$ がゲージ変換のパラメータになる．11 次元の反対称テンソル場のゲージ変換からは，10 次元の反対称テンソル場のゲージ変換が得られる．10 次元の場の変換に y 依存性が現れないように，変換のパラメータを

$$\hat{\zeta}_{MN}(x, y) = e^{3my}\, \zeta_{MN}(x) \tag{9.37}$$

とおく．得られる 10 次元のゲージ変換は，

$$\begin{aligned} &\delta_g\, e_\mu{}^a = \frac{9}{8}\, m\, \zeta\, e_\mu{}^a, \qquad \delta_g\, \phi = \frac{3}{2}\, m\, \zeta, \\ &\delta_g\, B_{\mu\nu\rho} = 3\, m\, \zeta\, B_{\mu\nu\rho} + 3\, \partial_{[\mu} \zeta B_{\nu\rho]} + 3\, \partial_{[\mu} \zeta_{\nu\rho]}, \\ &\delta_g\, B_{\mu\nu} = 3\, m\, \zeta\, B_{\mu\nu} + 2\, \partial_{[\mu} \zeta_{\nu]} + 3\, m\, \zeta_{\mu\nu}, \qquad \delta_g\, B_\mu = \partial_\mu \zeta, \\ &\delta_g\, \psi_\mu = \frac{9}{16}\, m\, \zeta\, \psi_\mu, \qquad \delta_g\, \lambda = -\frac{9}{16}\, m\, \zeta\, \lambda \end{aligned} \tag{9.38}$$

となる．11 次元の一般座標変換から得られる ζ ゲージ変換も含めた．これらの変換のうち，$\zeta_\mu, \zeta_{\mu\nu}$ の変換に対して，場の強さ (9.34) は不変である．また，ζ 変換に対しては，$\delta_g F_{\mu\nu} = 0$, $\delta_g F_{\mu\nu\rho} = 3m\zeta F_{\mu\nu\rho}$, $\delta_g F_{\mu\nu\rho\sigma} = 3m\zeta F_{\mu\nu\rho\sigma}$ のよ

うに共変的に変換する．重力場 $e_\mu{}^a$ は Weyl 変換の形の変換をするので，通常のスピン接続はこの変換に対して不変ではないが，変形されたスピン接続 (9.35) は不変である．(9.36) で定義された微分 $\tilde{D}_\mu$ は，ζ 変換に対して共変的に変換する共変微分である．(9.33) にあらわに現れている B_μ も，左辺の微分を ζ 変換に対する共変微分に変えることにより，吸収できる．

局所超変換は，(9.32) を 11 次元の超変換 (5.5) に代入して，10 次元の場で表すことによって得られる．その結果は，

$$\delta_Q = \delta_{Q0} + \delta_{Qm} \tag{9.39}$$

のように 2 つの部分の和の形に表すことができる．ここで，δ_{Q0} は，変形する前の変換 (5.11) の中で，反対称テンソル場の場の強さを (9.34) で置き換え，さらに，スカラー場と変換のパラメータの微分を

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \phi \ \rightarrow \ \tilde{D}_\mu \phi, \\ &D_\mu \epsilon \ \rightarrow \ \tilde{D}_\mu \epsilon \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \tilde{\omega}_\mu{}^{ab} \gamma_{ab} - \frac{9}{16} m B_\mu \right) \epsilon \end{aligned} \tag{9.40}$$

のように置き換えたものである．また，δ_{Qm} は，フェルミオン場に対してだけ寄与があり，

$$\delta_{Qm} \psi_\mu = -\frac{9}{16} m e^{-\frac{3}{4}\phi} \gamma_\mu \bar{\gamma} \epsilon, \qquad \delta_{Qm} \lambda = \frac{3}{4\sqrt{2}} m e^{-\frac{3}{4}\phi} \bar{\gamma} \epsilon \tag{9.41}$$

で与えられる．2 つの局所超変換の交換関係は，$m = 0$ のときの (5.12) と同じ形になる．ただし，右辺に現れる局所 Lorentz 変換のパラメータ (5.13) は，反対称テンソル場の場の強さが (9.34) に置き換わり，さらに，

$$\varDelta \lambda_{ab} = -\frac{9}{4} m \xi_{[a} B_{b]}, \tag{9.42}$$

が加わる．

ゲージ固定

ゲージ変換 (9.38) の形をみると，$m \neq 0$ の場合は，ζ と $\zeta_{\mu\nu}$ をパラメータとする変換によって，$\phi = 0$, $B_{\mu\nu} = 0$ とすることが可能なことがわかる．このゲージでは，ϕ と $B_{\mu\nu}$ の共変微分や場の強さは，

$$\tilde{D}_\mu \phi = -\frac{3}{2} m B_\mu, \qquad F_{\mu\nu\rho} = -3 m B_{\mu\nu\rho} \tag{9.43}$$

となる．これを (9.33) の B_μ と $B_{\mu\nu\rho}$ の場の方程式に代入すると，これらの場の質量項が得られる．これは，有質量超重力理論の場合と同様な **Higgs 機構**である．今の場合は，ϕ が B_μ の，$B_{\mu\nu}$ が $B_{\mu\nu\rho}$ の縦波成分になったと解釈できる．

場の方程式の解

場の方程式 (9.33) で，重力場以外の場をゼロとおくと，重力場の方程式以外

は自動的に満たされる．重力場の方程式は，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = -36\, m^2\, g_{\mu\nu} \tag{9.44}$$

となる．これは，正の宇宙定数をもつ Einstein 方程式であり，de Sitter 時空を解にもつ．この解に対しては，$\delta\psi_\mu = 0$ を満たす Killing スピノールが存在しないので，超対称性はすべて破れている．

付録 A
表記法

A.1 単位系

本書では，真空中の光の速さ c と Planck 定数 $\hbar$ が，$c=1$, $\hbar=1$ となる自然単位系を使う．また，Newton 定数（万有引力定数）G が，$16\pi G=1$ となる単位系を使う．この単位系では，重力場のラグランジアンの Einstein 項の係数が 1 になる．一般的な単位系で，c, $\hbar$, G の依存性を復活させるには，次元解析を行えばよい．また，G 依存性は次のようにしても復活できる．まず，ラグランジアン全体を $16\pi G$ で割り，次に，重力場以外の場を定数倍して，運動項が標準的な係数をもつようにする．たとえば，重力場，スカラー場，ベクトル場を含むラグランジアン

$$\mathcal{L} = e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\,e\,e^{-\frac{1}{2}\phi}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

の場合は，まず全体を $16\pi G$ で割り，その後，

$$\phi \;\rightarrow\; \sqrt{2}\,\kappa\,\phi, \qquad A_\mu \;\rightarrow\; \sqrt{2}\,\kappa\,A_\mu \qquad (\kappa \equiv \sqrt{8\pi G}) \tag{A.2}$$

と置き換えると，G を含んだラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\,e\,R - \frac{1}{2}\,e\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\,e\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa\phi}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \tag{A.3}$$

が得られる．

A.2 規約

特に断らない限り，D 次元時空の座標の添字を $\mu, \nu, \rho, \cdots = 0, 1, 2, \cdots, D-1$，局所 Lorentz 系のベクトル添字を $a, b, c, \cdots = 0, 1, 2, \cdots, D-1$ で表す．局所 Lorentz 系の平坦な計量として，

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1, \cdots, +1) = \eta^{ab} \tag{A.4}$$

を使う．また，完全反対称な Levi–Civita 記号 $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D}$, $\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D}$ を

$$\epsilon^{012\cdots D-1} = +1, \qquad \epsilon_{012\cdots D-1} = -1 \tag{A.5}$$

と選ぶ．

n 個の添字の対称化を，丸括弧 ( ) を使って，

$$T_{(a_1\cdots a_n)} = \frac{1}{n!}\sum_P T_{P(a_1\cdots a_n)} \tag{A.6}$$

のように書く．$\sum_P$ は，添字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の順列 $P(a_1\cdots a_n)$ についての和を表す．たとえば，

$$T_{(abc)} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{acb} + T_{cba} + T_{bac}\right) \tag{A.7}$$

である．同様に，n 個の添字の反対称化を，角括弧 [ ] を使って，

$$T_{[a_1\cdots a_n]} = \frac{1}{n!}\sum_P (-1)^P T_{P(a_1\cdots a_n)} \tag{A.8}$$

のように書く．$(-1)^P$ は，$P(a_1\cdots a_n)$ が $a_1\cdots a_n$ の偶置換のとき $+1$，奇置換のとき -1 を表す．たとえば，

$$T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{acb} - T_{cba} - T_{bac}\right) \tag{A.9}$$

である．

曲率などの幾何学的な量の定義については 1.2 節を，ガンマ行列やスピノールについては 1.4 節，3.1 節を参照せよ．

A.3 群

本文中に現れる主な群の定義についてまとめておく．以下では，m, n は自然数を表す．また，$\mathbf{1}_{n\times n}$ を $n\times n$ 単位行列として，

$$\eta = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{m\times m} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n\times n} \end{pmatrix} = \eta^T,$$
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n\times n} \\ -\mathbf{1}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^T \tag{A.10}$$

とおく．

- **$GL(n,\mathbb{R})$: 一般線形群（general linear group）**
  $n\times n$ 実行列 M のうち，行列式がゼロでない行列からなる群．非コンパクトな群で，次元は n^2 である．$GL(1,\mathbb{R})$ は実数全体を表すが，正の実数だけからなる集合も群をつくり，それを $GL(1,\mathbb{R})^+$ とよぶ．

- **$SL(n,\mathbb{R})$：特殊線形群（special linear group）**

  $n\times n$ 実行列 S のうち，

  $$\det S = 1 \tag{A.11}$$

  を満たす行列からなる群．非コンパクトな群で，次元は n^2-1 である．

- **$SO(m,n)$：特殊直交群（special orthogonal group）**

  $(m+n)\times(m+n)$ 実行列 O のうち，

  $$O^T\,\eta\,O = \eta, \qquad \det O = 1 \tag{A.12}$$

  を満たす行列からなる群．この場合は，$m=0$ または $n=0$ も考えることができ，$SO(0,n)=SO(n,0)=SO(n)$ は n 次元の回転群である．また，$SO(1,D-1)$ は D 次元の Lorentz 群である．$SO(n)$ はコンパクトな群であり，$SO(m,n)$ $(m,n\neq 0)$ は非コンパクトな群である．次元は $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ である．

- **$SU(m,n)$：特殊ユニタリー群（special unitary group）**

  $n\times n$ 複素行列 U のうち，

  $$U^\dagger\,\eta\,U = \eta, \qquad \det U = 1 \tag{A.13}$$

  を満たす行列からなる群．この場合も，$m=0$ または $n=0$ を考えることができ，$SU(0,n)=SU(n,0)=SU(n)$ は通常のコンパクトな特殊ユニタリー群である．$SU(m,n)$ $(m,n\neq 0)$ は非コンパクトな群である．次元は $(m+n)^2-1$ である．行列式の条件 $\det U=1$ がない場合は，ユニタリー群 $U(m,n)$ である．

- **$Sp(2n,\mathbb{R})$：実シンプレクティック群（real symplectic group）**

  $2n\times 2n$ 実行列 M のうち，

  $$M^T\,\Omega\,M = \Omega \tag{A.14}$$

  を満たす行列からなる群．非コンパクトな群で，次元は $n(2n+1)$ である．

- **$USp(2n)$：ユニタリー・シンプレクティック群（unitary symplectic group）**

  $2n\times 2n$ 複素行列 U のうち，

  $$U^T\,\Omega\,U = \Omega, \qquad U^\dagger U = 1 \tag{A.15}$$

  を満たす行列からなる群．コンパクトな群で，次元は $n(2n+1)$ である．

付録 B
ガンマ行列の公式

B.1 反対称積

n 個のガンマ行列の反対称積を

$$\gamma^{a_1 a_2 \cdots a_n} = \gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdots\gamma^{a_n]} \qquad (n = 1, 2, \cdots, D) \tag{B.1}$$

と書く．角括弧 [ ] は，付録 A で定義したように，添字の反対称化を表す．$a_1, \cdots, a_n$ の中に同じものがあるときは $\gamma^{a_1\cdots a_n} = 0$，すべて異なるときは $\gamma^{a_1\cdots a_n} = \gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\cdots\gamma^{a_n}$ となる．行列 (B.1) のトレースはゼロである．

双対

Levi–Civita 記号 $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$ を使うと，D が偶数のとき，

$$\gamma^{a_1\cdots a_n} = (-1)^{\frac{1}{4}(s-t)+\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{1}{(D-n)!}\,\epsilon^{a_1\cdots a_D}\,\gamma_{a_{n+1}\cdots a_D}\,\bar{\gamma} \tag{B.2}$$

が成り立つ．ここで，$\bar{\gamma}$ はカイラリティ行列 (3.12) である．D が奇数のときは，

$$\gamma^{a_1\cdots a_n} = (-1)^{\frac{1}{4}(s+3t-1)+\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{1}{(D-n)!}\,\epsilon^{a_1\cdots a_D}\,\gamma_{a_{n+1}\cdots a_D} \tag{B.3}$$

が成り立つ．

反対称積の積

2 つの反対称積の積を，

$$\begin{aligned}\gamma^{a_1\cdots a_m}\,\gamma_{b_1\cdots b_n} = {} & \gamma^{a_1\cdots a_m}{}_{b_1\cdots b_n} + m\,n\,\delta^{[a_m}_{[b_1}\,\gamma^{a_1\cdots a_{m-1}]}{}_{b_2\cdots b_n]} \\ & +2\cdot {}_m\mathrm{C}_2\,{}_n\mathrm{C}_2\,\delta^{[a_m}_{[b_1}\,\delta^{a_{m-1}}_{b_2}\,\gamma^{a_1\cdots a_{m-2}]}{}_{b_3\cdots b_n]} \\ & +3!\cdot {}_m\mathrm{C}_3\,{}_n\mathrm{C}_3\,\delta^{[a_m}_{[b_1}\,\delta^{a_{m-1}}_{b_2}\,\delta^{a_{m-2}}_{b_3}\,\gamma^{a_1\cdots a_{m-3}]}{}_{b_4\cdots b_n]} \\ & +\cdots \end{aligned} \tag{B.4}$$

のように反対称積の線形結合で表すことができる．最後の項は，$|m-n|$ 個のガンマ行列の反対称積を含む．たとえば，

$$\gamma^{abc}\,\gamma_{de} = \gamma^{abc}{}_{de} + 6\,\gamma^{[ab}{}_{[e}\,\delta^{c]}_{d]} + 6\,\gamma^{[a}\,\delta^{c}_{[d}\,\delta^{b]}_{e]} \tag{B.5}$$

となる．(B.4) を示すには，$a_1 \cdots a_m$ と $b_1 \cdots b_n$ の中に同じものがいくつあるかによって場合分けして考えればよい．(B.4) の第 1 項は $a_1 \cdots a_m$ と $b_1 \cdots b_n$ がすべて異なる場合，第 2 項は $a_1 \cdots a_m$ の中の 1 つと $b_1 \cdots b_n$ の中の 1 つが同じ場合，第 3 項は 2 つが同じ場合，$\cdots$ と考えれば成り立つことがわかる．係数は，それぞれの場合の数を数えれば得られる．(B.4) を使うと，公式

$$\begin{aligned}&\gamma_b\,\gamma^{ba_1a_2\cdots a_n} = (D-n)\,\gamma^{a_1a_2\cdots a_n} = \gamma^{a_1a_2\cdots a_n b}\,\gamma_b,\\ &\gamma^b\,\gamma^{a_1a_2\cdots a_n}\,\gamma_b = (-1)^n(D-2n)\,\gamma^{a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned} \tag{B.6}$$

が得られる．

完全性

D が偶数の場合に，反対称積の組

$$\mathbf{1}, \quad \gamma^{a_1}, \quad \gamma^{a_1a_2}, \quad \cdots, \quad \gamma^{a_1a_2\cdots a_D} \tag{B.7}$$

を考えよう．ただし，それぞれの行列で $a_1 < a_2 < \cdots$ とする．これらの行列は 1 次独立であり，かつ，$2^{D/2} \times 2^{D/2}$ 行列の完全系をなしている．つまり，任意の $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ 複素行列は，複素数を係数とするこれらの線形結合で一意的に表すことができる．これを示すには，まず，(B.7) の行列の個数が

$${}_D\mathrm{C}_0 + {}_D\mathrm{C}_1 + {}_D\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_D\mathrm{C}_D = (1+1)^D = 2^D \tag{B.8}$$

であり，$2^{D/2} \times 2^{D/2}$ 行列の成分の個数に等しいことに注意する．さらに，(B.7) の行列はトレースに関して

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^{a_1\cdots a_m}\,\gamma_{b_n\cdots b_1}) = \begin{cases} 2^{D/2}\,\delta^{a_1}_{b_1}\cdots\delta^{a_m}_{b_m} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{B.9}$$

のように直交している．ここで，$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$，$b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ とした．したがって，(B.7) は 2^D 個の 1 次独立な行列であり，$2^{D/2} \times 2^{D/2}$ 行列の完全系をなしていることがわかる．

D が奇数の場合は，

$$\mathbf{1}, \quad \gamma^{a}, \quad \gamma^{a_1a_2}, \quad \cdots, \quad \gamma^{a_1a_2\cdots a_{\frac{1}{2}(D-1)}} \tag{B.10}$$

は 2^{D-1} 個の 1 次独立な行列であり，$2^{(D-1)/2} \times 2^{(D-1)/2}$ 行列の完全系をなしている．これは，D が奇数の場合のガンマ行列は 1 次元低い偶数次元のガンマ行列を使って表せることと，上の D が偶数の場合の結果からわかる．(B.10) は，$n > \frac{1}{2}(D-1)$ に対する $\gamma^{a_1\cdots a_n}$ を含んでいないことに注意せよ．それらは，(B.3) のように，$n \leq \frac{1}{2}(D-1)$ の反対称積を使って表すことができるため，独立ではない．

B.2 双1次形式

ガンマ行列の反対称積と2つのスピノール ψ, λ から双1次形式

$$\bar{\psi}\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\lambda \tag{B.11}$$

をつくることができる．これは，$SO(t,s)$ 変換 (3.6) に対して，n 階のテンソルとして変換する．

3.1節で述べた Dirac 共役と荷電共役の定義 (3.9), (3.23) とガンマ行列の性質 (3.8), (3.24) を使うと，

$$\begin{aligned}&(\bar{\psi}\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\lambda)^\dagger = (-1)^{tn+\frac{1}{2}n(n-1)}\,\bar{\lambda}\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\psi,\\&\bar{\psi}\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\lambda = -(\pm 1)^{t+n}(-1)^{\frac{1}{2}t(t+1)+tn+\frac{1}{2}n(n-1)}\,\epsilon_\pm\,\bar{\lambda}^c\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\psi^c\end{aligned} \tag{B.12}$$

が成り立つことがわかる．ここで，2番目の式の右辺の符号 ± 1 は，荷電共役行列として C_+ を使った場合は $+1$, C_- を使った場合は -1 である．また，スピノールの成分を Grassmann 数として扱った．たとえば，4次元の Lorentz 群 $SO(1,3)$ の Majorana スピノール $\psi=\psi^c$, $\lambda=\lambda^c$ の場合は，

$$\begin{aligned}&(\bar{\psi}\,\lambda)^\dagger = \bar{\lambda}\,\psi = \bar{\psi}\,\lambda,\\&(\bar{\psi}\,\gamma^a\,\lambda)^\dagger = -\bar{\lambda}\,\gamma^a\,\psi = \bar{\psi}\,\gamma^a\,\lambda,\\&(\bar{\psi}\,\gamma^{ab}\,\lambda)^\dagger = -\bar{\lambda}\,\gamma^{ab}\,\psi = \bar{\psi}\,\gamma^{ab}\,\lambda,\\&(\bar{\psi}\,\gamma^{abc}\,\lambda)^\dagger = \bar{\lambda}\,\gamma^{abc}\,\psi = \bar{\psi}\,\gamma^{abc}\,\lambda,\\&(\bar{\psi}\,\gamma^{abcd}\,\lambda)^\dagger = \bar{\lambda}\,\gamma^{abcd}\,\psi = \bar{\psi}\,\gamma^{abcd}\,\lambda\end{aligned} \tag{B.13}$$

となる．この式から，たとえば，Majorana スピノール ψ に対して，$\bar{\psi}\gamma^a\psi=0$, $\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi=0$ となることがわかる．

Weyl スピノールからつくった双1次形式については，複号同順で

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}_\pm\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\lambda_\pm = 0 \qquad (n+t=\text{奇数のとき}),\\&\bar{\psi}_\pm\,\gamma^{a_1\cdots a_n}\,\lambda_\mp = 0 \qquad (n+t=\text{偶数のとき})\end{aligned} \tag{B.14}$$

が成り立つ．これは，(3.14), (3.15) と，$\bar{\gamma}\gamma^{a_1\cdots a_n} = (-1)^n\gamma^{a_1\cdots a_n}\bar{\gamma}$ からわかる．

B.3 Fierz 恒等式

2つの双1次形式 $\bar{\psi}_1\psi_2$ と $\bar{\psi}_3\psi_4$ の積を，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1\,\psi_2\,\bar{\psi}_3\,\psi_4 \;=\; -2^{-[\frac{D}{2}]}\Big[&\bar{\psi}_1\,\psi_4\,\bar{\psi}_3\,\psi_2 + \bar{\psi}_1\,\gamma_a\,\psi_4\,\bar{\psi}_3\,\gamma^a\,\psi_2\\&+\frac{1}{2}\,\bar{\psi}_1\,\gamma_{ab}\,\psi_4\,\bar{\psi}_3\,\gamma^{ba}\,\psi_2 + \frac{1}{3!}\,\bar{\psi}_1\,\gamma_{abc}\psi_4\,\bar{\psi}_3\,\gamma^{cba}\,\psi_2 + \cdots\end{aligned}$$

$$
+\frac{1}{n!}\bar{\psi}_1\gamma_{a_1\cdots a_n}\psi_4\bar{\psi}_3\gamma^{a_n\cdots a_1}\psi_2+\cdots
$$

$$
\left.+\frac{1}{N!}\bar{\psi}_1\gamma_{a_1\cdots a_N}\psi_4\bar{\psi}_3\gamma^{a_N\cdots a_1}\psi_2\right] \tag{B.15}
$$

のように書き換えることができる．ここで，

$$
N=\begin{cases} D & (D\text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{2}(D-1) & (D\text{ が奇数のとき}) \end{cases} \tag{B.16}
$$

である．左辺では，ψ_1 と ψ_2, ψ_3 と ψ_4 がそれぞれ双 1 次形式をつくっているが，右辺ではその組み合わせ方が変わっている．このような関係式を **Fierz 恒等式**という．

この Fierz 恒等式は次のように導かれる．まず，左辺を

$$
\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4=\bar{\psi}_1^{\alpha}\psi_{2\beta}\bar{\psi}_3^{\gamma}\psi_{4\delta}\,\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma}^{\delta} \tag{B.17}
$$

と書き直す．ここで，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は $2^{[D/2]}$ 個の値をとるスピノール添字である．ここに現れる $\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma}^{\delta}$ を，α と δ を固定して，γ と β が行と列を表す $2^{[D/2]}\times 2^{[D/2]}$ 行列とみなす．この行列は，(B.7) または (B.10) の線形結合として

$$
\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma}^{\delta}=C_{0\alpha}{}^{\delta}\delta_{\gamma}^{\beta}+C_1^{a}{}_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma_a)_{\gamma}{}^{\beta}+C_2^{ab}{}_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma_{ab})_{\gamma}{}^{\beta}+\cdots \tag{B.18}
$$

のように表すことができる．また，係数 $C_n^{a_1\cdots a_n}{}_{\alpha}{}^{\delta}$ は，この式の両辺に $(\gamma_{a_1\cdots a_n})_{\beta}{}^{\gamma}$ を掛けて，(B.9) を使うことにより求めることができる．このようにして，

$$
\begin{aligned}
\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma}^{\delta}=2^{-\left[\frac{D}{2}\right]}\Big[&\delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\gamma}^{\beta}+(\gamma_a)_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^a)_{\gamma}{}^{\beta}+\frac{1}{2}(\gamma_{ab})_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^{ba})_{\gamma}{}^{\beta}\\
&+\frac{1}{3!}(\gamma_{abc})_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^{cba})_{\gamma}{}^{\beta}+\cdots+\frac{1}{n!}(\gamma_{a_1\cdots a_n})_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^{a_1\cdots a_n})_{\gamma}{}^{\beta}\\
&+\cdots+\frac{1}{N!}(\gamma_{a_1\cdots a_N})_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^{a_N\cdots a_1})_{\gamma}{}^{\beta}\Big]
\end{aligned} \tag{B.19}
$$

が得られる．これを (B.17) に代入し，スピノールの成分の位置を入れ換えると，(B.15) が導かれる．(B.15) の右辺のマイナス符号は，スピノールの成分が Grassmann 数であるために現れる．

同様に，$\bar{\psi}_1\gamma^a\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^{bc}\psi_4$ のように，ガンマ行列を含んだ双 1 次形式に対する Fierz 恒等式も考えることができる．その場合の Fierz 恒等式は，(B.15) で，$\psi_2\to\gamma^a\psi_2$, $\bar{\psi}_3\to\bar{\psi}_3\gamma^{bc}$ のような置き換えをすることによって求めることができる．

付録 C
$D = 4, \mathcal{N} = 1$ 超重力理論の局所超対称性

4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論における作用の局所超変換不変性と局所超変換の交換関係を示す.

C.1 作用の局所超変換不変性

ラグランジアン (2.24) は,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}, \\
\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= e\, e_a{}^{\mu}\, e_b{}^{\nu}\, \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} = -\frac{1}{4}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_{abcd}\, e_\rho{}^c\, e_\sigma{}^d\, \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}, \\
\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= -\frac{1}{2}\, e\, e_a{}^{\mu}\, e_b{}^{\nu}\, e_c{}^{\rho}\, \bar{\psi}_\mu\, \gamma^{abc}\, \hat{D}_\nu\, \psi_\rho \\
&= \frac{1}{2}\, i\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \bar{\psi}_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_5\, \hat{D}_\rho\, \psi_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

と書き直すことができる. Riemann テンソル $\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}$ と共変微分 $\hat{D}_\mu$ は, スピン接続 $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ を通してのみ四脚場 $e_\mu{}^a$ に依存している. 作用を, $e_\mu{}^a$, ψ_μ, $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ の汎関数としてみると, スピン接続 (2.26) は方程式

$$
\frac{\delta}{\delta\hat{\omega}_{\mu ab}} \int d^4x\, \mathcal{L}(e, \psi, \hat{\omega}) = 0. \tag{C.2}
$$

を満たす. (これを示すには, (C.1) の $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$, $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ の 2 番目の式の形を使うとよい.) したがって, 超変換に対する作用の変化分を計算するときに, スピン接続による変化分は考える必要がない.

超変換に対する不変性を示すには, スピノールを含む次のような公式が必要である. まず, 任意の 4 つのスピノール ψ, χ, λ, ϕ に対して, (B.15) に与えた Fierz 恒等式

$$\bar{\psi}\chi\,\bar{\lambda}\phi = -\frac{1}{4}\Big[\bar{\psi}\phi\,\bar{\lambda}\chi + \bar{\psi}\gamma^a\phi\,\bar{\lambda}\gamma_a\chi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi\,\bar{\lambda}\gamma_{ab}\chi$$
$$-\bar{\psi}\gamma^a\gamma_5\phi\,\bar{\lambda}\gamma_a\gamma_5\chi + \bar{\psi}\gamma_5\phi\,\bar{\lambda}\gamma_5\chi\Big] \tag{C.3}$$

が成り立つ．また，任意の 2 つの Majorana スピノール ψ, λ の双 1 次形式は，(B.13) に与えた対称性

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}\lambda = \bar{\lambda}\psi,\\
&\bar{\psi}\gamma^a\lambda = -\bar{\lambda}\gamma^a\psi,\\
&\bar{\psi}\gamma^{ab}\lambda = -\bar{\lambda}\gamma^{ab}\psi,\\
&\bar{\psi}\gamma^a\gamma_5\lambda = \bar{\lambda}\gamma^a\gamma_5\psi,\\
&\bar{\psi}\gamma_5\lambda = \bar{\lambda}\gamma_5\psi.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

をもつ．

局所超変換 (2.31) に対するラグランジアン (C.1) の変化分を計算しよう．(C.1) の Einstein 項の初めの形を使うと，その変化分は，

$$\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= \delta_Q(e\,e_a{}^\mu\,e_b{}^\nu)\,\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}\\
&= -\frac{1}{2}e\,\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a\left(e_b{}^\nu\,\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{1}{2}e_\mu{}^a\,\hat{R}\right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

となる．一方，(C.1) の Rarita–Schwinger 項の 2 番目の形を使うと，その変化分は，

$$\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = \frac{1}{2}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(&\hat{D}_\mu\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma + \bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\hat{D}_\sigma\epsilon\\
&+\delta_Q e_\nu{}^a\,\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\Big)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

となる．最初の項は，部分積分をして全微分項を無視すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_\mu\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma = &-\frac{1}{2}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\mu\hat{D}_\rho\psi_\sigma\\
&-\frac{1}{2}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_\mu e_\nu{}^a\,\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma
\end{aligned} \tag{C.7}$$

と書き直せる．(2.27), Fierz 恒等式 (C.3), 対称性 (C.4) を使うと，(C.7) の第 2 項と (C.6) の第 3 項が相殺することを示せる．すると，(C.6) は，全微分項を除いて，

$$\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= -\frac{1}{4}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5[\hat{D}_\mu,\,\hat{D}_\rho]\psi_\sigma + \frac{1}{4}i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5[\hat{D}_\rho,\,\hat{D}_\sigma]\epsilon\\
&= \frac{1}{2}e\,\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a\left(e_b{}^\nu\,\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{1}{2}e_\mu{}^a\,\hat{R}\right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

となる．最後の等式では，

$$[\hat{D}_\mu,\,\hat{D}_\nu]\,\epsilon = \frac{1}{4}\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab}\,\epsilon \tag{C.9}$$

と (C.4) を使った．したがって，$\mathcal{L}_{\rm E}$ と $\mathcal{L}_{\rm RS}$ の変化分はお互いに相殺し，全ラグランジアン (2.24) は，局所超変換 (2.31) に対して全微分を除いて不変である．

C.2 局所超変換の交換関係

次に，2 つの局所超変換の交換関係について考える．四脚場に対する交換関係は，

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\epsilon_1),\, \delta_Q(\epsilon_2)]\, e_\mu{}^a &= \delta_Q(\epsilon_1)\left(\frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma^a\,\psi_\mu\right) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma^a\,\hat{D}_\mu\,\epsilon_1 - \frac{1}{4}\,\bar{\epsilon}_1\,\gamma^a\,\hat{D}_\mu\,\epsilon_2 \\ &= \frac{1}{4}\,\hat{D}_\mu\,(\bar{\epsilon}_2\,\gamma^a\,\epsilon_1) \qquad\qquad \text{(C.10)}\end{aligned}$$

となる．ここで，(C.4) の 2 番目の式を使った．$\xi^\nu = \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^\nu\epsilon_1$ とおき，(2.27) を使うと，

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\epsilon_1),\, \delta_Q(\epsilon_2)]\, e_\mu{}^a &= \hat{D}_\mu\,(\xi^\nu\, e_\nu{}^a) \\ &= \partial_\mu\xi^\nu\, e_\nu{}^a + \xi^\nu\,\hat{D}_\nu\, e_\mu{}^a + \xi^\nu\left(\hat{D}_\mu\, e_\nu{}^a - \hat{D}_\nu\, e_\mu{}^a\right) \\ &= \partial_\mu\xi^\nu\, e_\nu{}^a + \xi^\nu\,\partial_\nu\, e_\mu{}^a + \xi^\nu\,\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b\, e_\mu{}^b - \frac{1}{4}\,\xi^\nu\,\bar{\psi}_\nu\,\gamma^a\,\psi_\mu \\ &= [\delta_G(\xi) + \delta_L(-\xi\cdot\hat{\omega}) + \delta_Q(-\xi\cdot\psi)]\, e_\mu{}^a \qquad \text{(C.11)}\end{aligned}$$

となり，(2.32) の交換関係が $e_\mu{}^a$ に対して成り立つことがわかる．同様に，Rarita–Schwinger 場に対しても交換関係を計算することができる．そのために必要なスピン接続 $\hat{\omega}_{\mu ab}$ の超変換は，(2.27) の両辺を超変換することにより，

$$\delta_Q(\epsilon)\,\hat{\omega}_{\mu ab} = -\frac{1}{8}\,(\bar{\epsilon}\,\gamma_\mu\,\psi_{ab} - \bar{\epsilon}\,\gamma_a\,\psi_{b\mu} + \bar{\epsilon}\,\gamma_b\,\psi_{a\mu}) \qquad \text{(C.12)}$$

と得られる．ここで，$\psi_{\mu\nu} = \hat{D}_\mu\psi_\nu - \hat{D}_\nu\psi_\mu$ である．(C.12), (C.3), (C.4) を使うと，

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\epsilon_1),\, \delta_Q(\epsilon_2)]\,\psi_\mu &= [\delta_G(\xi) + \delta_L(-\xi\cdot\hat{\omega}) + \delta_Q(-\xi\cdot\psi)]\,\psi_\mu \\ &\quad + \frac{1}{128}\,\bar{\epsilon}_2\,\gamma^{ab}\,\epsilon_1\,(2\,\gamma_{ab\mu\nu}\,\mathcal{R}^\nu - \gamma_{ab}\,\mathcal{R}_\mu - 2\,e_{\mu a}\,\mathcal{R}_b) \\ &\quad - \frac{1}{16}\,\xi^\nu\,\left(\gamma_\nu\,\mathcal{R}_\mu + 2\,\gamma_{\mu\nu\lambda}\,\mathcal{R}^\lambda\right) \qquad \text{(C.13)}\end{aligned}$$

が得られる．ここで，$\mathcal{R}^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma}$ であり，Rarita–Schwinger 場の方程式は $\mathcal{R}^\mu = 0$ である．したがって，Rarita–Schwinger 場の方程式を使うと，交換関係は (2.32) と一致する．

付録 D
反 de Sitter 時空

反 de Sitter 時空は，負の定曲率をもつ極大対称空間であり，ゲージ化された超重力理論の場の方程式の解として現れる．また，高次元の Poincaré 超重力理論のコンパクト化した解に含まれている場合もある．ここでは，反 de Sitter 時空の定義とスカラー場の安定性について述べる．

D.1 反 de Sitter 時空

D 次元の反 de Sitter 時空 AdS_D は，計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{AB}\, dX^A\, dX^B \\ &= -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-1}(dX^i)^2 - (dX^D)^2 \end{aligned} \tag{D.1}$$

をもつ $D+1$ 次元空間の中の双曲面

$$(X^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1}(X^i)^2 + (X^D)^2 = \frac{1}{a^2} \tag{D.2}$$

として定義することができる．ここで，X^A $(A = 0, 1, \cdots, D)$ は $D+1$ 次元空間の座標であり，a は長さの逆数の次元をもつ定数である．a^{-1} は，**反 de Sitter 時空の半径**とよばれる．(D.2) を満たす X^A は，独立な D 個の座標 (t, ρ, θ^α) $(\alpha = 1, 2, \cdots, D-2)$ を使って，

$$X^0 = \frac{\cos t}{a\cos\rho}, \quad X^i = \frac{1}{a}\tan\rho\, \hat{X}^i(\theta), \quad X^D = \frac{\sin t}{a\cos\rho} \tag{D.3}$$

と表すことができる．$\hat{X}^i$ は $\sum_{i=1}^{D-1}(\hat{X}^i) = 1$ を満たす変数で，$D-2$ 次元の単位球面 S^{D-2} の座標 θ^α を使って表されている．たとえば，$D = 4$ の場合は，θ^α として通常の極座標 θ, ϕ を使い，$\hat{X}^1 = \sin\theta\cos\phi$, $\hat{X}^2 = \sin\theta\sin\phi$, $\hat{X}^3 = \cos\theta$ と表されている．座標 t, ρ の動く範囲は，$0 \le t \le 2\pi$, $0 \le \rho < \frac{\pi}{2}$

である．このままだと時間 t 方向が周期的になってしまうので，**普遍被覆空間**（universal covering space）を考え，$-\infty < t < \infty$ とする．これは，無限個の反 de Sitter 時空を時間方向につなげてできる時空である．以下では，この被覆空間を反 de Sitter 時空とよぶ．

(D.3) を計量 (D.1) に代入すると，D 次元空間の計量 η_{AB} から誘導される双曲面上の計量

$$ds^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \rho} \left(-dt^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho\, h_{\alpha\beta}(\theta)\, d\theta^\alpha\, d\theta^\beta\right) \tag{D.4}$$

が得られる．$h_{\alpha\beta}(\theta)$ は単位球面 S^{D-2} の計量である．(D.4) が，D 次元反 de Sitter 時空の計量である．この計量から，Riemann テンソルを求めると，多脚場を使って，

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = -a^2 \left(e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b - e_\mu{}^b\, e_\nu{}^a\right) \tag{D.5}$$

と表すことができる．これは，反 de Sitter 時空が，負の定曲率空間であり，その曲率半径が a^{-1} であることを示している．Ricci テンソルとスカラー曲率は，

$$R_{\mu\nu} = -(D-1)\, a^2\, g_{\mu\nu}, \qquad R = -D\,(D-1)\, a^2 \tag{D.6}$$

となる．

$D+1$ 次元空間内の双曲面としての定義 (D.2) から，反 de Sitter 時空が，アイソメトリとして $SO(2, D-1)$ 対称性をもつことがわかる．$SO(2, D-1)$ の次元は $\frac{1}{2}D(D+1)$ なので，それだけの個数の **Killing** ベクトルが存在する．それらを，$\xi^\mu_{AB} (= -\xi^\mu_{BA})$ と表すと，

$$\xi^\mu_{AB}\, \partial_\mu = X_A\, \partial_B - X_B\, \partial_A \qquad \left(X_A \equiv \eta_{AC}\, X^C\right) \tag{D.7}$$

と書ける．これを変数変換 (D.3) によって独立な座標 (t, ρ, θ^α) で書き直せば，その座標での成分 $\xi^{\mu AB}$ が得られ，それが Killing 方程式

$$D_\mu\, \xi_\nu + D_\nu\, \xi_\mu = 0 \tag{D.8}$$

を満たすことが確かめられる．

D.2 スカラー場の安定性

反 de Sitter 時空では，スカラー場が安定であるための条件が Minkowski 時空の場合と異なる*1)．反 de Sitter 時空上で，ある背景場のまわりのスカラー場の微小なゆらぎに対する安定性を考えよう．スカラー場のゆらぎ $\varphi(x)$ のラグランジアンを

*1) P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, *Ann. Phys.* **144** (1982) 249; L. Mezincescu and P.K. Townsend, *Ann. Phys.* **160** (1985) 406.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, e\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \varphi\, \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2}\, m^2\, e\, \varphi^2 \tag{D.9}$$

とする．ここに含まれる計量 $g_{\mu\nu}$ は，反 de Sitter 時空の計量 (D.4) である．反 de Sitter 時空上の場の理論を矛盾なく定義するためには，空間的無限遠 $\rho = \frac{\pi}{2}$ における場の振舞いを注意深く指定する必要がある*2)．ラグランジアンから導かれる場の方程式は，無限遠近く $\rho \sim \frac{\pi}{2}$ では，

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{D-2}{\cos\rho}\,\partial_\rho - \frac{m^2}{a^2\cos^2\rho}\right]\varphi = 0 \tag{D.10}$$

となる．場の無限遠での漸近的振舞いを，$\varphi \sim (\cos\rho)^\lambda f(t,\theta)$ と仮定して，これに代入すると，定数 λ に対する方程式

$$\lambda^2 - (D-1)\lambda - \frac{m^2}{a^2} = 0 \tag{D.11}$$

が得られる．脚注 $*1)$ の論文のくわしい解析によると，この 2 次方程式の解が複素数のときは，場のエネルギーが正定値ではなく，また，保存しないことが示される．また，解が実数のときは，2 つの解のうち少なくとも 1 つに対しては，エネルギーは正定値で保存することが示される．したがって，上の 2 次方程式が実数解をもつことから，安定性の条件

$$m^2 \geq -\frac{1}{4}\,(D-1)^2\, a^2 \tag{D.12}$$

が得られる．質量の 2 乗が負であっても，その値があまり小さくなければ安定であることがわかる．$m^2 < 0$ のときは，ポテンシャルエネルギーは負であるが，場に ρ 依存性があるため運動エネルギー（場の微分を含むエネルギー）は正であり，エネルギー全体としては正定値になっている．

---

*2) S.J. Avis, C.J. Isham and D. Storey, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3565.

参考文献

本書のテーマについてさらに勉強するための参考文献をあげる．

一般相対論

[1] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology" (John Wiley & Sons, 1972).

場の量子論

[2] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory" (Addison–Wesley, 1995).

[3] 九後汰一郎,『ゲージ場の量子論 I，II』（培風館，1989）.

[4] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vols. I, II" (Cambridge University Press, 1995, 1996) （邦訳：青山・有末訳『場の量子論 1～4』（吉岡書店，1997～1999））.

超対称性

[5] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity" (Princeton University Press, 1992).

[6] S. Ferrara (ed.), "Supersymmetry, Vols. 1, 2" (North–Holland/World Scientific, 1987).

[7] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields. Vol. III" (Cambridge University Press, 2000) （邦訳：青山・有末・杉山訳,『場の量子論 5, 6』（吉岡書店，2001, 2003））.

[8] 太田信義・坂井典佑,『超対称性理論—現代素粒子論の基礎として』（臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-51）（サイエンス社，2006）.

超重力理論

[9] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories*, in "Recent Developments in Gravitation", eds. M. Lévy and S. Deser (Plenum Press, 1979).

[10] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, *Phys. Rept.* **68** (1981) 189.

[11] A. Salam and E. Sezgin (eds.), "Supergravities in Diverse Dimensions, Vols. 1, 2" (North–Holland/World Scientific, 1989).

[12] T. Ortín, "Gravity and Strings" (Cambridge University Press, 2004).

[13] 藤井保憲,『超重力理論入門』（産業図書，2005）.

弦理論

[14] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory, Vols. 1, 2" (Cambridge University Press, 1987).

[15] J. Polchinski, "String Theory, Vols. I, II", (Cambridge University Press, 1998). （邦訳：伊藤・小竹・松尾訳,『ストリング理論 1，2』（シュプリンガー・フェアラーク東京，2006））.

[16] 太田信義,『超弦理論・ブレイン・M 理論』（シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002）.

[17] K. Becker, M. Becker and J.H. Schwarz, "String Theory and M-Theory: A Modern Introduction" (Cambridge University Press, 2007).

[18] B. Zwiebach, "A First Course in String Theory, 2nd edition" (Cambridge University Press, 2009).

[19] 今村洋介,『超弦理論の基礎—弦とブレーンの導入から』（臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-80）（サイエンス社, 2011）.

Kaluza–Klein 理論

[20] T. Appelquist, A. Chodos and P.G.O. Freund, "Modern Kaluza-Klein Theories" (Addison–Wesley, 1987).

[21] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson and C.N. Pope, *Kaluza-Klein Supergravity*, *Phys. Rept.* **130** (1986) 1.

群論

[22] R. Gilmore, "Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications" (John Wiley & Sons, 1974).

[23] H. Georgi, "Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories (2nd edition)" (Benjamin/Cummings, 1999)（邦訳：九後訳『物理学におけるリー代数』（吉岡書店, 2010））.

微分幾何とトポロジー

[24] T. Eguchi, P.B. Gilkey and A.J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, *Phys. Rept.* **66** (1980) 213.

[25] 中原幹夫,『理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II』（ピアソン・エデュケーション, 2000, 2001）.

索　引

タ

ハ

マ

ヤ

ラ

欧字

著者略歴

谷井 義彰
たにい よしあき

1986 年　東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了，理学博士
1986 年　東京大学原子核研究所理論部共同利用協力研究員
1987 年　イタリア International Centre for Theoretical Physics 研究員
1988 年　埼玉大学理学部助手
　　　　この間，日本学術振興会特定国派遣研究者（1993 年〜1994 年，英国 Imperial College）
1996 年　埼玉大学理学部助教授
2006 年　埼玉大学大学院理工学研究科教授
　　　　現在に至る
専　門　素粒子論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-82
『超重力理論　超弦理論における役割』
著　者　谷井　義彰
2011 年 4 月 25 日　初版発行

数理科学編集部　　　　発行人　木下敏孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　© 株式会社 サイエンス社　　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤　眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博